Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants dont la difficulté est croissante.

Justifiez chaque réponse à une question : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Pour toutes les représentations géométriques, le plan $\mathscr{P}$ sera rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (on pourra prendre pour unité graphique, lorsque les dessins sont nécessaires, 2 cm ou quelques « carreaux »).

Questions de cours

1. Soient A, B deux points de $\mathscr{P}$ d'affixe respectifs $z_A, z_B \in \mathbb{C}$. Donner et démontrer la formule donnant la longueur $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ en fonction de z_A et z_B et faire un dessin.
2. Énoncer, sans démonstration, les formules d'Euler donnant l'expression du cosinus et du sinus en fonction de l'exponentielle imaginaire.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Démontrer la formule donnant $\cos a \cos b$. En déduire que $\cos^2 a = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$.

Exercice 1

On considère les points P et Q du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $p = \sqrt{3} - i$ et $q = e^{i\frac{\pi}{4}} p$.

1. Exprimer p sous forme trigonométrique et placer P sur un dessin.
2. Exprimer q sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. Placer Q sur le dessin.
3. Donner la valeur de
$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}.$$
4. À l'aide des questions de cours, montrer que
$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + 1\right].$$
En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et, à l'aide de la question précédente, de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.
5. Si le cercle unité et les axes du repère sont tracés, expliquer brièvement comment effectuer le dessin précédent avec uniquement un compas et une règle non graduée. Le dessin est-il cohérent avec la question précédente ?

Exercice 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - (1+i)z + i = 0$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,
$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0. \tag{E}$$
   a. Résoudre l'équation (E) (on donnera les solutions sous forme exponentielle).
   b. Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles réelles ?
   c. Pour quelles valeurs de θ l'équation (E) admet-elle une seule solution ?
   d. En développant $(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$, retrouver le résultat de la question a.
   e. Résoudre, en utilisant les questions précédentes, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 3

Soient A, B, C trois points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3}+i$ et $z_C = \sqrt{3}+i$.

1. Donner la forme exponentielle de z_A, z_B, z_C.
2. En déduire que A, B, C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
3. Calculer les longueurs exactes AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Dans la suite de l'exercice, A, B, C sont des points quelconques du cercle de centre 0 et de rayon 1 d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$. On notera $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

4. Montrer que si ABC est un triangle équilatéral, alors
$$a + jb + j^2c = 0 \quad \text{ou} \quad a + jc + j^2b = 0. \tag{C}$$
5. Montrer que la condition (C) est une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit un triangle équilatéral.

Désormais, A, B, C sont des points quelconques de $\mathscr{P}$ (on ne suppose plus qu'ils appartiennent au cercle unité).

6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ABC soit un triangle équilatéral.