Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : Fonction log intégral (adapté de oral CCP PC)

1. Sur quel ensemble ln est-elle continue ? Rappeler la valeur de $\ln(1)$ ainsi que le tableau de variations de ln (on fera apparaître la valeur de $\ln(1)$ ainsi que le signe de $\ln x$ suivant les valeurs de x).
2. En déduire que $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ puis que f admet au moins une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ qu'on notera F.
3. Tracer le tableau des variations de f.
4. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Que vaut F' sur ces intervalles ?

On introduit, pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, la fonction

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

5. Montrer que si $x \in]1,+\infty[$, $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$ puis que φ est bien définie sur $]1,+\infty[$.
6. Montrer que si $x \in]0,1[$, $[x,x^2] \subset]0,1[$ puis que φ est bien définie sur $]0,1[$.
7. Justifier que pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ puis que φ est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.
8. Soit $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Montrer que
$$\varphi'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$
9. Soit $x \in]0,1[$. En utilisant la question 3, montrer que pour tout $t \in [x,x^2]$, $\dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{1}{\ln(x^2)}$ puis que
$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(x^2)} \leq \varphi(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln x}.$$
On prendra garde à l'ordre des bornes.
10. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{x^2-x}{\ln(x^2)} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{x^2-x}{\ln x}$ puis que la limite de φ en 0^+ est 0.
11. Montrer que φ admet un prolongement par continuité sur $[0,1[$ noté encore φ (on précisera $\varphi(0)$).
12. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que pour tout $t \in [x,x^2]$, $\dfrac{x^2}{t\ln t} \geq \dfrac{t}{t\ln t} \geq \dfrac{x}{t\ln t}$.
13. En déduire l'encadrement, pour $x \in]0,1[$:
$$x^2\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \varphi(x) \leq x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$
14. En remarquant une forme "u'/u", montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln 2$.
15. En déduire la limite de φ en 1^-.
16. Étudier également la limite φ en 1^+ et montrer que φ admet un prolongement par continuité en 1 noté encore φ. On donnera la valeur de $\varphi(1)$.
17. Sur quel intervalle a-t-on finalement prolongé φ avec les questions 11 et 16 ?
18. Démontrer que la limite de φ en $+\infty$ est $+\infty$ (on montrera un encadrement du même type qu'en 13).
19. À l'aide des différentes questions du problème, déterminer le tableau des variations de φ sur $[0,+\infty[$.
20. Démontrer avec la question 6 l'existence de l'intégrale que l'on calculera :
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Problème 2 : Calcul de l'intégrale de Gauss par les intégrales de Wallis (adapté de CCP PSI)

Le but du problème est de calculer l'intégrale, à laquelle on donnera un sens :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Partie I : Une étude de fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\, \mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

I.1 Calculer $f(0)$, justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x^2}$.

I.2 En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

I.3 En justifiant que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \int_1^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = e^{-1} - e^{-x}.$$

I.4 Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t + e^{-1}.$$

I.5 En déduire que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et que f admet une limite finie en $+\infty$ (on utilisera 2).

Ceci permet de justifier la notation $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ que l'on calcule dans la suite du problème.

Partie II : Dérivées successives de f

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}.$$

II.1 Déterminer, avec la question précédente, P_1.

II.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}.$$

Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n+1)}(x) = \left(P_n'(x) - 2x P_n(x)\right) e^{-x^2}$.

II.3 On pose $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2X\, P_n(X)$. Montrer que ceci achève la récurrence.

II.4 Avec la relation précédente, montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n - 1$.

Partie III : Intégrales de Wallis

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\, \mathrm{d}t$.

III.1 Calculer W_0 et W_1 et W_2 (on pourra utiliser les formules d'Euler).

III.2 En donnant un encadrement de la fonction cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)^n.$$

III.3 En déduire, en intégrant l'inégalité précédente, que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

III.4 Montrer ainsi, avec les deux questions précédentes, que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

III.5 Montrer également que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ et que $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

On va maintenant déterminer un équivalent de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant que $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que

$$W_{n+2} = \left[\sin(t)\cos(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2\cos(t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Simplifier cette expression en déterminant la valeur du crochet.

III.7 Rappeler la valeur, pour tout réel t de $\sin(t)^2+\cos(t)^2$ et en déduire que pour tout $\in \mathbb{N}$:

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\cos(t)^n\,\mathrm{d}t = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big).$$

III.8 Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

III.9 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\,W_{n+2}\,W_{n+1} = (n+1)\,W_{n+1}\,W_n$.

III.10 Montrer, par récurrence, avec cette relation, que la suite $\big((n+1)\,W_{n+1}\,W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On précisera la valeur de cette constante à l'aide de la question III.1.

III.11 Avec les questions III.5 et III.8 montrer que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ puis, avec III.10, que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Quelle est la limite de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie IV : Calcul de l'intégrale de Gauss

IV.1 En étudiant la fonction $x \mapsto e^{-x} - 1 + x$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $e^{-x} \geq 1 - x$.

IV.2 En déduire, (en posant $x = t^2$ dans la question précédente), que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$:

$$e^{-nt^2} \geq (1-t^2)^n$$

puis que

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$

IV.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{n}\,t$, montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

IV.4 En effectuant le changement de variable $t = \sin(y)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)^{2n+1}\mathrm{d}y.$$

IV.5 Déduire des trois questions précédentes et de la partie précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

IV.6 Avec l'équivalent de la partie précédente, quelle est la limite de $(\sqrt{n}\,W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

IV.7 En passant à la limite dans l'inégalité de IV.5, montrer que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

IV.8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sqrt{n}\,W_{2n-2} \geq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis conclure.

Problème 3 : Irrationalité de e et π, transcendance de e (adapté Mines/ENSAI (I et II), adapté oral X (III))

Le but du problème est de montrer que e et π ne peuvent s'exprimer comme des quotient d'entiers et que e est transcendant (ceci est défini dans la dernière partie).

Partie I : Irrationalité de e

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$: $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}.$$

I.1 Rappeler la valeur pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $\exp^{(n)}(0)$ (les dérivées successives de la fonction exp en 0).

I.2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

I.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)\,(n+1)!} < 0.$$

I.4 En déduire la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.5 En déduire avec la formule de Taylor avec reste intégral que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 (1-t)^n \frac{\exp^{(n+1)}(t)}{n!}\,\mathrm{d}t = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\,\mathrm{d}t.$$

I.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En montrant que pour $t \in [0,1]$, $(1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$, justifier que

$$\frac{1}{n} \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t\,\mathrm{d}t \leq \frac{e}{n}.$$

Conclure sur la limite de cette intégrale lorsque n tend vers $+\infty$.

I.7 Déterminer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n.$$

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

I.8 Justifier avec la question précédente que $q!(e-u_q) > 0$, $q!(v_q - u_q) = \frac{1}{q}$ puis que

$$0 < q!\,(e-u_q) \leq \frac{1}{q} < 1.$$

I.9 Démontrer que $q!(e-u_q)$ est un entier et conclure.

Partie II : Irrationalité de π

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \dfrac{p}{q}$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n.$$

II.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec l'expression de P_n, montrer que $P_n(\frac{p}{q} - X) = P_n(X)$.

II.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant la relation précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n'(\frac{p}{q} - X) = -P_n'(X)$ puis que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(\frac{p}{q} - X) = (-1)^k P_n^{(k)}(X)$

II.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de P_n ? En déduire que $P_n^{(2n+1)} = 0$ et que

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

II.4 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k q^k p^{n-k} X^{n+k}$.

II.5 A l'aide des deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [\![n, 2n]\!], \\ (-1)^{k-n} \dfrac{k!}{n!} \dbinom{n}{k-n} p^{2n-k} q^{k-n} & \text{si } k \in [\![n, 2n]\!]. \end{cases}$$

II.6 En déduire que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(0)$ est un entier.

II.7 Montrer également avec la question précédente et II.2 que pour $n, k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\pi)$ est également un entier.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t) P_n(t) \, \mathrm{d}t$.

II.6 Justifier que pour tout $t \in [0, \pi]$, $0 \leq p - qt \leq p$ (on n'oubliera pas que l'on suppose que $\pi = \frac{p}{q}$).

II.7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$ (on déterminera le signe de P_n avec la question précédente).

II.8 Déduire de II.6 que pour tout $t \in [0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \, |P_n(t)| \leq \pi^n p^n$.

II.9 Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|I_n| \leq \frac{(\pi p)^n}{n!}.$$

II.10 En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \Big[-\cos t \, P_n(t) + \cos t \, P_n''(t) - \cos t \, P_n^{(4)}(t) + \cdots + (-1)^{k-1} \cos t \, P_n^{(2k)}(t) \Big]_0^{\pi} + (-1)^k \int_0^{\pi} P_n^{(2k+1)}(t) \cos(t) \, \mathrm{d}t.$$

On pourra effectuer deux intégrations par parties successives.

II.12 En déduire avec II.6 et II.7 que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers et conclure.

Partie III : Transcendance de e

III.1 Soit P un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$. On pose $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P^{(k)}$. Montrer que $Q' = Q - P$.

III.2 On considère, pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t) = e^{-t} Q(t)$. Montrer que pour tout réel t : $f'(t) = -e^{-t} P(t)$.

III.3 En déduire que pour tout réel x :

$$I(x) = \int_0^x e^{x-t} P(t) \, \mathrm{d}t = e^x \sum_{k=0}^{p} P^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{p} P^{(k)}(x).$$

On veut montrer que e n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers : c'est la définition de la transcendance. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$$

avec $a_0 \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = X^{p-1} (X-1)^p (X-2)^p \cdots (X-n)^p$ et

$$J = a_0 I(0) + a_1 I(1) + \cdots + a_n I(n)$$

où I est définie précédemment en III.3.

III.4 Montrer que J est un entier.

III.5 Montrer que $(p-1)!$ divise J et que pour tout entier premier p assez grand $J \neq 0$.

III.6 Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|J| \leq C^p$ et trouver une minoration de $|J|$.

III.7 En déduire que e est transcendant.