Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte 1 exercice et 2 problèmes tous indépendants. **Justifiez** et **rédigez** vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 *Sommation* (extrait CCP PSI)

On souhaite étudier, pour quelques exemples, lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, le comportement de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$b_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

1. Rappeler la formule du binôme, donnant, pour $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n$ lorsque $x, y \in \mathbb{R}$ pour en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

On suppose dans les questions 2 et 3 que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante en 1.

2. Donner la valeur de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$? Quelle est la nature de la série $\sum b_n$?

Soit $x \in]-1,1[$. On suppose dans les questions 4 à 6 que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $a_n = x^n$.

4. Donner l'expression, pour $n \in \mathbb{N}$, de la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ puis montrer que la série $\sum a_n$ converge et que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \frac{1}{1-x}.$$
5. Montrer, à l'aide de la question 1 que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$.
6. Justifier que $\sum b_n$ converge et donner la valeur, en fonction de x de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

On suppose dans les questions 7 et 8 que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $a_n = (-1)^n$.

7. Quelle est la nature de $\sum a_n$?
8. Quelle est la nature de $\sum b_n$?

Problème 1 : Ruine du joueur

Partie I : Suite arithmético-géométrique

Soit $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ et $p \in]0,1[$, $p \neq 1/2$. On considère une suite, sous réserve qu'elle existe, définie par $u_0 = 1$, $u_N = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = p\,u_{n+1} + (1-p)\,u_{n-1}.$$

I.1 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1-p}{p}$. En déduire une expression de cette suite en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et v_1.

On pose $x = \dfrac{1-p}{p}$.

I.2 Montrer que $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

I.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ puis que

$$u_n = 1 + v_1\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + v_1\frac{x^n - 1}{x-1}.$$

I.4 On rappelle que $u_N = 0$. Déterminer une expression de v_1 et conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1 - \frac{x^n - 1}{x^N - 1}.$$

Partie II : Étude d'un jeu

Un joueur souhaite acheter une voiture de luxe au-dessus de ses moyens et pour cela il se rend au casino. Le prix de la voiture correspond à $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ jetons et le joueur reçoit une mise initiale de $n \in [\![0, N]\!]$ jetons.

Il joue à un jeu où la probabilité qu'il gagne un jeton est $p \in]0,1[$, $p \neq 1/2$ et la probabilité qu'il perde un jeton est $1 - p$. Il joue plusieurs fois, de manière indépendante, à ce jeu.

Le jeu se termine soit par la ruine du joueur, dès qu'il n'a plus de jeton (il n'y a donc aucun lancer si $n = 0$), soit par sa victoire, dès qu'il a obtenu N jetons.

On notera u_n la probabilité que le joueur soit ruiné avec une mise initiale de n jetons.

II.1 Déterminer u_0 et u_N.

II.2 On suppose ici que $n \in [\![1, N-1]\!]$. On considère les événements E_n : « le joueur est ruiné avec une mise initiale de n jetons » et G_1 : « le premier jeu est gagné ». Montrer que

$$P(E_n) = P(E_n|G_1)\,p + P(E_n|\overline{G_1})\,(1-p).$$

II.3 Montrer ainsi que pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$: $u_n = p\,u_{n+1} + (1-p)\,u_{n-1}$.

II.4 En déduire, avec la partie I, une expression de u_n pour $n \in [\![0, N]\!]$.

II.5 Démontrer, lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, que

$$x^k - 1 \underset{x \to 1}{\sim} k\,(x-1).$$

II.6 En déduire la limite de u_n (qui dépend de x) lorsque x tend vers 1. Interpréter le résultat (on remarquera que la limite lorsque x tend vers 1 correspond à la limite lorsque p tend vers $1/2$).

II.7 On suppose que la voiture est chère compte-tenu du nombre de jetons qu'on donne au joueur au départ. Quelle est la probabilité de voir le joueur parvenir à s'acheter la voiture ?

Problème 2 : Déplacement d'un pion (adapté de ESCP)

Partie I : Matrices

On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{4}J + \frac{1}{6}K$.

I.1 Calculer JK et KJ. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, $J^k K^{n-k}$ est la matrice nulle.

I.2 Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 4^{n-1}J$ et $K^n = 2^{n-1}K$.

I.3 À l'aide des deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = \left(\frac{1}{4}J + \frac{1}{6}K\right)^n = \frac{1}{4}J + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}K.$$

Indication : on pourra appliquer la formule du binôme de Newton (d'autres méthodes sont possibles).

Partie II : Modélisation du déplacement d'un pion sur un damier à 9 cases

On considère un damier à 9 cases blanches et noires (en grisé sur le dessin) numérotées de la façon suivante :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun. Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ le pion est en B_1.

II.1 Sur quelles cases peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ?

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements :

- $B_{k,n}$ « le pion est sur la case B_k après $2n$ déplacements » ;
- $N_{k,n}$ « le pion est sur la case N_k après $2n-1$ déplacements » ;

et $B_{k,0}$ « le pion est sur la case B_k au départ ».

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où $p_{k,n} = P(B_{k,n})$ et, si $n \geq 1$, $W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où $q_{k,n} = P(N_{k,n})$.

II.2 Quelle est la valeur de V_0 ? de W_1 ?

II.3 Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{1,n}$, $B_{2,n}$, $B_{3,n}$, $B_{4,n}$, $B_{5,n}$ et $N_{1,n}$, $N_{2,n}$, $N_{3,n}$, $N_{4,n}$ sont deux systèmes complets d'événements.

II.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,5]\!]$:

$$P(B_{k,n}) = P(B_{k,n}|N_{1,n})\,P(N_{1,n}) + P(B_{k,n}|N_{2,n})\,P(N_{2,n}) + P(B_{k,n}|N_{3,n})\,P(N_{3,n}) + P(B_{k,n}|N_{4,n})\,P(N_{4,n}).$$

II.5 Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = B\,W_n$ où

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

II.6 Montrer de façon analogue au cas précédent qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = A\,V_{n-1}$. On donnera l'expression de A.

II.7 Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = (BA)\,V_{n-1}$ et que $AB = M$, la matrice définie en partie I.

Partie III : Calcul des probabilités.

III.8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = (BA)^n V_0$ et que, si $n \geq 1$, $(BA)^n = B\,(AB)^{n-1}A = B\,M^{n-1}A$.

III.9 En réutilisant l'expression des puissances successives de M en I.3, déterminer avec la question précédente la première ligne de la matrice $(BA)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

III.10 En déduire que $p_{1,n} = 1/3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Interpréter ce résultat.

III.11 On considère la variable aléatoire définie, pour $i \in [\![1,n]\!]$, par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le pion est en case } B_1 \text{ après } 2\,i \text{ déplacements} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle loi suit cette variable aléatoire ? On donnera son espérance.

III.12 Que représente la variable aléatoire $Y = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Quelle est la loi de Y ? Calculer son espérance.