Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants dont la difficulté est croissante.

Justifiez et **rédigez** vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Pour toutes les représentations géométriques, le plan $\mathscr{P}$ sera rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (on pourra prendre pour unité graphique, lorsque les dessins sont nécessaires, 2 cm ou quelques « carreaux »).

Questions de cours

1. Donner les **domaines de définition** et de **dérivabilité** des fonctions exp, ln, racine carrée, cos et sin.
2. Donner la fonction dérivée des fonctions exp, ln, racine carrée, cos et sin et pour u une fonction définie sur un intervalle I, la dérivée de e^u, $\sqrt{u}$ et $\ln u$ (on ne demande pas ici le domaine de dérivabilité).
3. Énoncer précisément le théorème de la bijection.

Exercice 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère le point M d'affixe z, le point N d'affixe $1+z$ et le point P d'affixe $1+z+z^2$.

1. Lorsque M est construit sur un dessin, comment en déduit-on N ?
2. On considère, **uniquement dans cette question**, que $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Exprimer $1+z$ sous forme trigonométrique et calculer $1+z+z^2$.
3. On suppose désormais que M est un point du cercle de centre O et de rayon 1 dont l'abscisse est strictement positive. Justifier qu'il existe $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que
$$z = e^{i\theta}.$$
4. Exprimer $1+z = 1+e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique en fonction de θ.
5. Montrer que les points O,M,P sont alignés si et seulement si $\dfrac{1}{z}+1+z$ est réel. En déduire que O,M,P sont alignés.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Que vaut $\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n$ et quel est le signe de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$?
2. Montrer que
$$S_n = 1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$
3. Exprimer la forme trigonométrique, en fonction de n, du nombre : $1-e^{i\frac{\pi}{n}}$. En déduire les égalités :
$$\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}} = 1 + i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$
4. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
5. À l'aide des questions 3 et 4, donner la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 3

On souhaite résoudre l'équation, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0. \tag{E}$$

1. Le nombre complexe $z = 1$ est-il solution de (E) ?
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E), alors z vérifie
$$z^n - 1 = 0. \tag{E'}$$
3. L'équation (E') est-elle équivalente à l'équation (E) ?
4. Donner l'expression trigonométrique, en fonction de n des solutions de (E'). En déduire les solutions de (E). Combien (E) a-t-elle de solutions ?
5. Donner l'expression algébrique des solutions de (E) pour $n = 5$.
6. Calculer la valeur du produit des solutions de (E).
7. Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0. \tag{E''}$$
Combien cette équation a-t-elle de solutions ?