Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants dont la difficulté est croissante.

**Justifiez** et **rédigez** toutes vos réponses bien que l'énoncé soit **très long** : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Pour toutes les représentations graphiques, le plan sera rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (on pourra prendre pour unité graphique, lorsque les dessins sont nécessaires, 2 cm ou quelques « carreaux »).

### Questions de cours

1. Donner les **domaines de définition** et de **dérivabilité** des fonctions exp, ln, racine carrée, cos et sin.
2. Donner la fonction dérivée des fonctions exp, ln, racine carrée, cos et sin.
3. Donner, pour $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$, la dérivée de $u^3$, $e^u$, $\sqrt{u}$ et $\ln u$ (on ne demande pas ici le domaine de dérivabilité).
4. Énoncer **précisément** le théorème de la bijection.

---

### Exercice 1

On considère la fonction $f$ donnée par

$$f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2).$$

1. Donner le domaine de définition de $f$ et montrer que $f$ est paire. Quelle symétrie sa courbe représentative admet-elle ?
2. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on justifiera avec soin au moins une des limites).
4. Établir le tableau des variations de $f$ (on fera notamment apparaître $f(0)$ que l'on calculera).
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$0 < f(x) \leq 1.$$
6. Montrer que $f$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Justifier que pour tout $y \in ]0,1]$, il existe $x \in [0,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.
7. La fonction $f$ est-elle une bijection sur $\mathbb{R}$ ? Justifiez votre réponse.
8. Calculer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en $x = 0$.
9. Tracer la courbe représentative de $f$.
10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) + 2xf(x) = 0.$$
En déduire que $f$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f''(x) = (2x^2 - 1)f(x).$$

---

### Exercice 2

1. En étudiant la fonction $g$ donnée par $g(x) = e^x - 1 - x$ et en montrant que celle-ci est positive sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x \geq 1 + x.$$
2. Montrer que la tangente $T_0$ en $x = 0$ à la courbe représentative de la fonction exp satisfait l'équation $y = 1 + x$. La courbe représentative de la fonction exp est-elle située au-dessus ou en-dessous de $T_0$ ?

Désormais, on considère une fonction $f$ quelconque, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f''(x) \geq 0.$$

5. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f'(x) - f'(0)$. Que vaut $\varphi(0)$ ? Montrer, en faisant un tableau de variations, que $\varphi$ est positive sur $\mathbb{R}$.
6. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\psi(x) = f(x) - xf'(0) - f(0)$. Que vaut $\psi(0)$ ? Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que
$$\varphi(x) = \psi'(x).$$
En déduire, avec la question précédente, que $\psi$ est croissante sur $\mathbb{R}$ puis que $\psi$ est positive.
7. Conclure que la courbe représentative de la fonction $f$ est située au-dessus de sa tangente en 0.
8. Montrer que la courbe représentative de la fonction $f$ est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes (une telle fonction est dite convexe).

---

**Exercice 3**

On démontre dans cet exercice des inégalités qui vont permettre d'encadrer la somme définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + 2 + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Déduire de la question 1. de l'exercice 2 que pour tout réel $x > -1$,
$$x \geq \ln(1+x).$$
2. En déduire que, pour tout réel $x < 1$,
$$x \leq -\ln(1-x).$$
3. Montrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, que
$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \ln(k) - \ln(k-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$
4. Montrer, à l'aide des questions 1, 2 et 3, que pour tout entier $k \geq 2$,
$$\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leq \frac{1}{k} \leq \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)$$
5. Simplifier, pour tout entier $n \geq 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big)$$
6. En sommant les inégalités, pour tout entier $k \geq 2$, de la question 4 et en utilisant les simplifications de la question 5, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ :
$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$
puis que
$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$
7. Quelle est la limite de $H_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = H_n - \ln n$ pour $n \geq 1$ est convergente.

---