Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices (2 cours et un plus long) ainsi qu'un problème tous indépendants et dont la difficulté est croissante.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Pour toutes les représentations graphiques, le plan sera rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (on pourra prendre pour unité graphique, lorsque les dessins sont nécessaires, 2 cm ou quelques « carreaux »).

Questions de cours

1. Donner, sans démonstration, le domaine de définition de la fonction tangente (tan) ainsi que son domaine de dérivabilité et les deux expressions de sa dérivée.
2. Donner, sans démonstration, les ensembles de dérivabilité et les expressions des dérivées des fonction ch et sh. Redémontrer la formule donnant, pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x$.
3. Donner, sans démonstration, l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction arctan.

Exercice 1 : Deux systèmes linéaires

1. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ x+4z & = & 1 \\ x+y+z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   On précisera si l'ensemble des solutions est fini ou infini.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$. Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S_\alpha) \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x+y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array} \right.$$

   en exprimant x et y en fonction du paramètre α.
   Quel est l'ensemble des solutions du système lorsque $\alpha = 1$?

Exercice 2 : Étude de la fonction $\arctan \circ \tan$

1. Que valent $\tan(0)$ et $\tan(\pi)$? En déduire la valeur de $\arctan\big(\tan(\pi)\big)$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et que f est π-périodique.
3. En justifiant votre réponse, montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = x$.
4. Représenter sur un graphique, en justifiant la construction, la courbe représentative de la fonction f.
5. Donner une expression simple de la fonction f sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 3 : Étude de la fonction sécante hyperbolique

On définit la fonction sécante hyperbolique, notée sch, par :

$$\text{sch}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

1. Donner le domaine de définition de sch. Établir que sch est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner une expression de sa dérivée et dresser le tableau des variations de sch (on calculera $\text{sch}(0)$ et les limites aux bornes de l'intervalle de définition).

2. Prouver que sch est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

Pour la suite de l'exercice, on définit la fonction argument sécante hyperbolique, notée Argsch, par

$$\text{Argsch} = \text{sch}^{-1}_{|[0,+\infty[},$$

la fonction réciproque de la restriction de sch à $[0,+\infty[$.

4. Soit $y \in]0,1]$. Résoudre, en fonction de y, l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{R}$ donnée par

$$yX^2 - 2X + y = 0.$$

Quelle solution de cette équation est supérieure ou égale à 1 ?

5. Soit $y \in]0,1]$. En posant $X = e^x$ et à l'aide de la question précédente, résoudre l'équation d'inconnue $x \in [0,+\infty[$ donnée par :

$$y = \text{sch}\, x.$$

En déduire que pour tout $y \in]0,1]$:

$$\text{Argsch}\, y = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\text{sh}\, x)$. Que vaut $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x$? Donner une expression simple de $\tan t$ puis montrer que

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \text{sch}^2 x.$$

En déduire une nouvelle définition de la fonction sch.

Problème : Méthode de Newton

Partie A : Une équation

A. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto x^3 + x - 1$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, montrer que l'équation d'inconnue $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ donnée par

$$x^3 + x = 1$$

admet une unique solution notée α dont on ne cherchera pas l'expression.

On cherche à développer une méthode numérique d'approximation de la solution de la question A.1.

Pour les parties B et C, on considère $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, M un réel strictement positif et f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ et vérifiant, pour tout $x \in [a,b]$:

$$0 < f''(x) \leq M$$

et

$$f'(a) > 0.$$

Partie B : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $x \in [a,b]$ fixé. On considère la fonction φ, **de la variable y**, définie pour $y \in [a,b]$ par :

$$\varphi(y) = f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \frac{M}{2}(y-x)^2.$$

On ne demande pas de justifier que φ est dérivable deux fois sur $[a,b]$.

B.1. Montrer que φ'' est négative sur $[a,b]$ puis en déduire le signe de φ' sur $[a,b]$ en fonction de x.

B.2. En déduire que φ est négative sur $[a,b]$.

B.3. Montrer que la fonction $y \mapsto f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)$ est positive sur $[a,b]$.

B.4. Conclure que pour tous $x,y \in [a,b]$:

$$0 \leq f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) \leq \frac{M}{2}(y-x)^2.$$

Partie C : Méthode de Newton

On suppose que α est un réel qui vérifie $f(\alpha) = 0$ et on définit, pour tout $x \in [a,b]$,

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

C.1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $0 < f'(a) < f'(x)$ et que α est unique.

C.2. Montrer, à l'aide de la partie précédente, que pour tout $x \in [a,b]$:

$$0 \leq N(x) - \alpha \leq \frac{M}{2f'(x)}(x-\alpha)^2 \leq \frac{M}{2f'(a)}(x-\alpha)^2$$

On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $N(x) \in [a,b]$ et on définit désormais une suite récurrence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 \in [a,b]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = N(x_n)$$

et on note $K = \dfrac{M}{2f'(a)}$.

C.3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq K(x_n - \alpha) \leq \big(K(x_0 - \alpha)\big)^{2^n}.$$

C.4. Si $K|x_0 - \alpha| < 1$, quelle est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

C.5. *Application :* Pour $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, f la fonction de la partie A et $x_0 = \frac{3}{4}$, montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $N(x) \in [a,b]$ et calculer K. A-t-on $K(x_0 - \alpha) < 1$? Que peut-on en conclure ?

Partie D : Une autre équation

D.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue $u \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ donnée par

$$\tan u = u$$

admet une unique solution notée u_k. On définit ainsi une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

D.2 Quelle est la limite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

D.3 On définit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_k - k\pi$. Montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et trouver sa limite.

D.4 Pourrait-t-on appliquer la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée de u_k ?
