Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices dont les questions sont de plus en plus difficiles dans chaque exercice.

**Justifiez** et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

### Questions de cours

1. On considère le système d'inconnues $x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+w & = & 0 \\ z+w & = & 0 \\ t+v+w & = & 0 \end{array} \right. .$$

   Donner le rang de ce système, les inconnues principales et secondaires et donner l'ensemble des solutions de $(S)$ sous la forme $\mathscr{S} = \cdots$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de « $A$ est inversible » ainsi que deux critères différents d'inversibilité (au choix).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner, sans démonstration, l'expression de $(AB)^{\mathrm{T}}$ en fonction de $A^{\mathrm{T}}$ et $B^{\mathrm{T}}$.

---

### Exercice 1 : Des matrices inversibles ou non.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.
2. En remarquant que $\frac{1}{2}\left[A^2 - A\right] = A\left(\frac{1}{2}\left[A - I_3\right]\right)$, justifier que $A$ est inversible et donner une expression de son inverse.

On considère désormais la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $J^2 = 3J$.
4. Montrer que :

$$J \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   La matrice $J$ est-elle inversible ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère finalement la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice comportant $n$ lignes et $n$ colonnes et dont tous les coefficients sont des 1.

1. Montrer que $K^2 = nK$.
2. On souhaite raisonner par l'absurde pour prouver que $K$ n'est pas inversible. On suppose donc que $K$ est inversible. Montrer que dans ce cas

$$K = nI_n.$$

3. Conclure quant à l'inversibilité de la matrice $K$.

---

**Exercice 2 : Polynômes de Lagrange**

1. Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & -1 \\ 4x+2y+z & = & -8 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes de la variable $t \in \mathbb{R}$ donnés par :

$$P_1(t) = t^2 + xt + y \quad \text{et} \quad P_2(t) = t^3 + xt^2 + yt + z.$$

4. Montrer que $P_1(1) = 1 + x + y$. Calculer également $P_1(0)$ en fonction de $x$ et $y$.
5. On suppose que $P_1(0) = 0$ et $P_1(1) = 0$. Montrer que $x$ et $y$ sont solutions du système $(S_1)$.
6. En déduire l'expression du polynôme $P_1$.
7. Donner, à l'aide du système $(S_2)$, l'expression du polynôme $P_2$ qui vérifie :

$$P_2(0) = P_2(1) = P_2(2) = 0.$$

---

**Exercice 3 : Suites récurrentes linéaires**

**Partie A : Puissances d'une matrice**

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A.1 Montrer que $\varphi + \varphi' = 1$, que $\varphi\varphi' = -1$ et que $\varphi - \varphi' = \sqrt{5}$.

A.2 Montrer que $\varphi^2 - (\varphi')^2 = \sqrt{5}$ et que $-\varphi'\varphi^2 + (\varphi')^2\varphi = \sqrt{5}$.

et on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi' \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}.$$

A.3 Calculer le produit $PQ$ (on simplifiera à l'aide de la question A.1). En déduire que $P$ est inversible et exprimer $P^{-1}$ en fonction de $Q$.

A.4 Montrer que $PDP^{-1} = A$ (on simplifiera à l'aide des questions A.1 et A.2).

A.5 Donner l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $D^n$ en fonction de $\varphi$ et $\varphi'$.

A.6 Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

A.7 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \star & \star \\ \varphi^n - (\varphi')^n & \star \end{pmatrix},$$

où les $\star$ sont des coefficients que l'on ne calculera pas.

**Partie B : Suite de Fibonacci**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

B.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$, où $A$ est la matrice de la partie A.

B.2 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$ où $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

B.3 Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

B.4 *Application* : Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en après $n$ mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple ? Ce type de modèle est-il réaliste ?

**Partie C : Cas général**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$$

B.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = BV_n$, où $B$ est une matrice que l'on explicitera.

B.2 Montrer que $B^2 - aB - bI_2 = 0_2$.

B.3 Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$ (éventuellement confondues et complexes) les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ du polynôme

$$z^2 - az - b = 0.$$

Montrer que $(B - \lambda_1 I_2)(B - \lambda_2 I_2) = 0_2$.

B.4 Montrer que pour $i = 1, 2$, $B - \lambda_i I_2$ n'est pas inversible puis qu'il existe $X_i \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que

$$BX_i = \lambda_i X_i.$$

B.5 On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$.