Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 1 exercice ainsi que 2 problèmes tous indépendants et dont la difficulté est croissante.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Questions de cours

1. Donner, sans démonstration, la formule d'intégration par parties (on n'oubliera pas le « Soient f, g deux fonctions de classe ... sur ... »)
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I donnée, pour tout $t \in I$, par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = 0.$$

On écrira $\mathscr{S}_I = \cdots$. Quelle hypothèse fait-on généralement sur a ?

Exercice 1 : Une équation différentielle

Soit I l'intervalle $]-1, +\infty[$.

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ sur I.
2. En montrant que, pour tout $t \in I$:

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

déterminer une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x}{x+1}$ sur I.

3. Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I donnée, pour tout $t \in I$ par :

$$(1+t)\,y'(t) - t\,y(t) = 0.$$

4. Déterminer l'unique solution de l'équation précédente vérifiant $y(0) = 1$.

Problème 1 : Formule de Madhava-Leibniz

On rappelle que la fonction tangente est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1. Montrer que la fonction tan est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Dresser le tableau de variations de tan sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

$$0 \leq \tan x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \tan^{2n+2}(x) \leq \tan^{2n}(x).$$

2. Déterminer une primitive de $\tan^2$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en remarquant que $\tan^2(x) = \big(1 + \tan^2(x)\big) - 1$.
3. Déterminer une primitive de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pour la suite de l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Calculer I_0 et I_1.
5. À l'aide de la question 1., montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et :

$$0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+1}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant le changement de variable $u = \tan t$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(t) \left(1 + \tan^2(t)\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$$

   puis que $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$
7. Déduire de la question précédente et de la question 5. que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
8. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

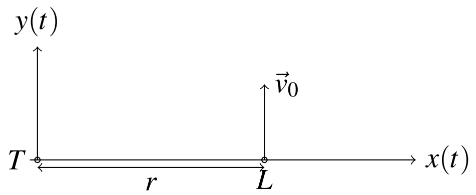
$$(-1)^n I_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

9. Conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

C'est la première formule qui a permis d'obtenir au XV^e siècle 11 décimales de π.

Problème 2 : Trajectoire de la Lune et lois de Képler

On considère la situation d'un corps céleste L mobile soumis à la force de gravitation d'un autre corps T fixe dans le référentiel considéré dont la vitesse et la position initiales sont données par le dessin :



On donne dans la suite les équations différentielles qui régissent ce système et on souhaite connaître la trajectoire de L.

Cas général

Dans la suite, on suppose que r ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que x et y sont des solutions du système $\mathscr{E}$ qui s'écrit :

$$\mathscr{E} \begin{cases} x''(t) = \dfrac{-1}{r(t)^3}\, x(t) \\[2mm] y''(t) = \dfrac{-1}{r(t)^3}\, y(t) \end{cases}$$

où

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = 0.$$

Ce système vient du principe fondamental de la dynamique et des conditions initiales.

1. Montrer, à l'aide du système $\mathscr{E}$ que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $y''(t)\,x(t) - x''(t)\,y(t) = 0$.
2. En effectuant des intégrations par parties, déduire de la question précédente qu'il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y'(t)\,x(t) - y(t)\,x'(t) = C.$$

3. Montrer, à l'aide de l'expression de r que, sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{y}{r}\right)' = \frac{x}{r^3}(y'x - yx') = -Cx'' \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{r}\right)' = Cy''.$$

4. En déduire qu'il existe des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{y(t)}{r(t)} = -Cx'(t) + A \quad \text{et} \quad \frac{x(t)}{r(t)} = Cy'(t) + B.$$

5. Montrer à l'aide des conditions initiales que $A = 0$.
6. Conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = r(t) = C^2 + By(t).$$

Trajectoire circulaire

Dans le cas où T est la terre et L la Lune, on peut mesurer physiquement B qui est très proche de 0. On fera l'hypothèse que $B = 0$ dans les trois questions suivantes.

7. Montrer que x et y vérifient les équations différentielles, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x''(t) + \frac{1}{C^6}x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y''(t) + \frac{1}{C^6}y(t) = 0.$$

8. Résoudre ces équations différentielles (on rappelle que $y(0) = 0$ et $x'(0) = 0$).
9. Montrer que la trajectoire de la Lune est un cercle.

Trajectoire elliptique

10. Montrer que même si $B \neq 0$, la trajectoire du corps céleste L est bornée.
