Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 2 exercices ainsi que 2 problèmes tous indépendants. On rappelle que pour la majorité de la classe, les questions de cours, les deux exercices et le problème 1 sont à traiter. Pour les élèves à qui il a été précisé sur la du dernier DM de faire le DS dans une version plus difficile : les questions de cours, le problème 1 et le problème 2 sont à traiter.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Questions de cours

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, donner sans démonstration un équivalent de $\sin(u_n)$ et de $\ln(1+u_n)$.
2. Donner la définition de deux suites adjacentes.

Exercice 1 : Équivalents

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** et qui converge vers 0. On suppose que

$$u_{n-1}+u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

1. Quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée, pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $a_n=n(u_{n-1}+u_n)$? Quelle est la limite de la suite $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\leq u_n\leq u_{n-1}$ puis que
$$n(u_{n+1}+u_n)\leq n(2u_n)\leq n(u_{n-1}+u_n).$$
3. En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{n}{n+1}a_{n+1}\leq 2n\,u_n\leq a_n$.
4. Conclure quant à la limite de $(2n\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 2 : Suite implicite

On rappelle que la fonction tangente est définie par :

$$\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, π-périodique et que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$:
$$\tan'(x)=1+\tan^2(x).$$
2. Préciser les limites de tan en $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-$ (remarquer que par π-périodicité, il suffit d'étudier les limites en $\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$).
3. Établir le tableau des variations sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$, en justifiant les limites aux bornes, de la fonction
$$f:x\mapsto\tan(x)-x.$$
4. En précisant le théorème et les hypothèses utilisées, montrer qu'il existe un unique réel x_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$ tel que
$$\tan(x_n)-x_n=0.$$

5. Justifier que $-\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$.

On étudie désormais la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer avec l'encadrement précédent que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
6. À nouveau avec l'encadrement précédent, montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Problème 1 : Moyenne géométrique

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par

$$a_0 = a > 0, \quad b_0 = b > 0 \quad \text{avec} \quad b < a$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2\,a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - \frac{2a_{n-1}\,b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$ (on n'oubliera pas que dans la question précédente : $n \in \mathbb{N}^*$).
4. À l'aide des définitions des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n}.$$

5. Avec les question 3 et 4, montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
6. Quel est le plus grand terme de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le plus petit terme de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_0 \leq b_n \leq a_n \leq a_0.$$
8. Donner un minorant de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un majorant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. En citant précisément le théorème utilisé et à l'aide des questions précédentes, montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. **On note ℓ la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ' celle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
10. Justifier que la limite de $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est ℓ.
11. En passant à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, montrer que $\ell = \ell'$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ?
12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n\,b_n = ab$. En déduire que $\ell = \sqrt{ab}$.
13. Montrer, avec la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - \ell = \frac{(a_n - \ell)^2}{2\,a_n} \quad \text{et} \quad a_{n+1} + \ell = \frac{(a_n + \ell)^2}{2\,a_n}.$$

14. En déduire un équivalent de $(a_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 : Comparaison série intégrale

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite, on appelle **série** associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On utilisera ces notations dans la suite et on supposera dans la suite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **positive**.

Un premier exemple :

Dans cette partie, on étudie la série harmonique, qui est la série associée à $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $x \in [k-1,k]$: $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{k}$, montrer que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x} \geq \frac{1}{k} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

   Interpréter graphiquement cette inégalité.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\ln n \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) - \ln 2$$

   et donner un encadrement de v_n.

3. Déterminer un équivalent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on montrera précisément que $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$).

Cas général

Dans cette partie, on se place dans la situation suivante : soit f une fonction définie, continue **décroissante et positive** sur $[1,+\infty[$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = f(n)$ et que v_n est la série associée.

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $x \in [k-1,k]$: $u_{k-1} \geq f(x) \geq u_k$.

5. En déduire, comme dans la partie précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_1 + \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \geq v_n \geq \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. En déduire un critère simple pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n = u_n - \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \Delta_k \leq u_k - u_{k+1}$ et montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

8. En déduire que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente : on notera Δ sa limite.

9. Conclure que

$$v_n = \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x + \Delta + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

10. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la série associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans ce cas ?

Développement de la série harmonique

11. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication : pour le développement jusqu'à γ, on pourra appliquer la partie précédente. Pour le terme suivant, on étudiera plus précisément $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
