Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 2 exercices et 2 problèmes tous indépendants. On rappelle que pour la majorité de la classe, les questions de cours, les deux exercices et le problème 1 sont à traiter. Pour les élèves à qui il a été précisé de faire le DS dans une version plus difficile : les questions de cours, le problème 1 et le problème 2 sont à traiter.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Questions de cours

1. On considère une famille libre $(e_1,\dots,e_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Donner deux critères différents pour que cette famille soit une base de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le noyau d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F pour que f soit injective.

Exercice 1 : Une décomposition de $\mathbb{R}^3$ (adapté concours e3a PC)

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère les ensembles :

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+3z=0\right\} \quad \text{et} \quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y-z=0,\ 2x+z=0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $u=(1,1,0)$ et $v=(-3,0,1)$ appartiennent à F. En déduire que $\mathrm{Vect}(u,v)\subset F$.
3. Montrer que (u,v) est libre.
4. Montrer réciproquement que $F\subset \mathrm{Vect}(u,v)$ (on pourra résoudre le système : $x-y+3z=0$).
5. En suivant par exemple la démarche des trois questions précédentes, montrer que $G=\mathrm{Vect}(w)$ où
$$w=(-\tfrac{1}{2},1,1).$$
6. Déterminer les dimensions de F et de G.
7. Montrer que $F\cap G=\{(0,0,0)\}$.
8. Conclure que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+3z \end{array}.$$

9. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, que $w\notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et que
$$F=\mathrm{Ker}(\varphi).$$

On peut montrer de façon générale que tout plan de $\mathbb{R}^3$ est le noyau d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et qu'on peut décomposer $\mathbb{R}^3$ sous la forme $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(\varphi)\oplus\mathrm{Vect}(w)$ où $w\notin\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 2 : Une symétrie vectorielle (adapté oral CCP PSI)

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-2y-2z}{3},\dfrac{-2x+y-2z}{3},\dfrac{-2x-2y+z}{3}\right) \end{array}.$$

On note $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,-1,0)$ et $e_3=(0,1,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que l'identité de $\mathbb{R}^3$ est l'application $Id_{\mathbb{R}^3}$ qui vérifie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$Id_{\mathbb{R}^3}\big((x,y,z)\big)=(x,y,z).$$

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $S(e_1) = -e_1$, $S(e_2) = e_2$ et $S(e_3) = e_3$.
3. En déduire que $S^2(e_i) = e_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
4. Soit $e \in \mathbb{R}^3$. Justifier qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :
$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$
5. Justifier que $S(e) = \lambda_1 S(e_1) + \lambda_2 S(e_2) + \lambda_3 S(e_3)$ et que $S^2(e) = \lambda_1 S^2(e_1) + \lambda_2 S^2(e_2) + \lambda_3 S^2(e_3)$.
6. Conclure que $S^2(e) = e$ puis que $S \circ S = Id_{\mathbb{R}^3}$.

On pose $\psi = S - Id_{\mathbb{R}^3}$.

7. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\psi\big((x, y, z)\big) = -\frac{2}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$.
8. En résolvant le système $x + y + z = 0$, montrer que (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\psi)$.
9. Montrer que (e_1) est une base de $\mathrm{Ker}(S + Id_{\mathbb{R}^3})$.
10. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(S + Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(S - Id_{\mathbb{R}^3})$.

Géométriquement, cet exercice signifie que S est la symétrie par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$ qui n'est autre que le noyau de $S - Id_{\mathbb{R}^3}$.

Problème 1 : Application Δ sur les polynômes

Ce problème étudie une application qui transforme des sommes complexes à déterminer en des calculs plus simples. On rappelle que si $P(X)$ est un polynôme, le polynôme $P(X+1)$ est le polynôme où l'on a remplacé l'indéterminée X par $X+1$: par exemple, si $P(X) = X^4$, $P(X+1) = (X+1)^4$.

1. Développer et simplifier $P(X+1) - P(X)$ pour $P(X) = 1$, $P(X) = X$, $P(X) = X^2$, $P(X) = X^3$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On pose $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que :
$$P(X+1) - P(X) = (b + c + d) + (2c + 3d)X + 3dX^2.$$
Quel est au plus le degré de $P(X+1) - P(X)$?

On introduit l'ensemble
$$V = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}.$$

3. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et montrer que $\mathrm{Vect}(X, X^2, X^3) \subset V$.
4. Montrer que $P \in V$ si et seulement si $a = 0$. En déduire que la famille (X, X^2, X^3) est une famille génératrice de V.
5. Justifier que (X, X^2, X^3) est une famille libre et donner une base de V. Quelle est la dimension de V ?

On peut ainsi introduire l'application :
$$\begin{array}{rcl} \Delta : V & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

6. Montrer que Δ est une application linéaire de V dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Injectivité de Δ

On souhaite montrer que Δ est injective.

7. Justifier que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$ où 0 désigne le polynôme nul.
8. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. Montrer que $P(X+1) = P(X)$ puis que $P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$.
9. En remarquant que $P \in V$, en déduire que $0 = P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$.
10. Si P était non nul, combien P aurait-il de racines distinctes au maximum ?
11. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \{0\}$ où 0 désigne le polynôme nul et conclure.

Surjectivité de Δ

On souhaite montrer que Δ est surjective. On introduit les polynômes :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = X, \quad B_2 = \frac{1}{2}X(X-1), \quad B_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).$$

12. Calculer $\Delta(B_0)$ puis montrer que pour $i = 1,2,3$, $\Delta(B_i) = B_{i-1}$.
13. Justifier que (B_0, B_1, B_2) est libre puis que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
14. Justifier que $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$. Compte-tenu de la question précédente 13, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = \lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2.$$

16. On pose $Q(X) = \lambda_0 B_1 + \lambda_1 B_2 + \lambda_2 B_3$. Montrer que $Q \in V$ et que $\Delta(Q) = P$.
17. En déduire que $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}(\Delta)$ et conclure.

Ainsi l'application Δ est un isomorphisme de V sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Une expression de somme

18. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in V$ tel que $\Delta(Q) = X^2$.
19. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} \big(Q(i+1) - Q(i)\big) = Q(n+1)$
20. Déterminer l'expression de $Q(X)$ (on pourra s'aider de la question 16).
21. Déterminer une formule pour $\sum_{i=0}^{n} i^2$.

Problème 2 : Commutant d'un endomorphisme nilpotent (adaptation de Centrale PSI)

Ce problème étudie de façon théorique les endomorphismes f d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$f^{\dim(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{\dim(E)-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

La dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ est notamment un tel endomorphisme.

Dans tout ce problème

(i) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E (applications linéaires de E dans E) ;

(iii) $0_{\mathscr{L}(E)}$ désigne l'application nulle (pour tout $x \in E$, $0_{\mathscr{L}(E)}(x) = 0_E$;

(iv) Id_E désigne l'application identité de E (pour tout $x \in E$, $Id_E(x) = x$).

Questions préliminaires :

1. Si u et v sont des endomorphismes de E, démontrer que $u \circ v$ est un endomorphisme de E (c'est un résultat du cours que l'on demande de démontrer à nouveau).

On note $u^0 = Id_E$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u \circ u^{k-1}$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un endomorphisme de E (on pourra effectuer une récurrence).

Un premier exemple en dimension 3 :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x,y) \end{array}.$$

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $h^2\big((x,y,z)\big)$ et $h^3\big((x,y,z)\big)$. Justifier que h^3 est l'application nulle et que h^2 n'est pas l'application nulle.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 3$, h^k est l'application nulle.
5. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En calculant $e_1, h(e_1), h^2(e_1)$, montrer que $\big(e_1, h(e_1), h^2(e_1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Opérateur de décalage :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (0,x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{array}.$$

6. Montrer que $g^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ et que $g^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
7. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$:

$$g(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad g(e_n) = (0,\dots,0).$$

8. En déduire que pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$,

$$g^k(e_1) = e_{k+1}.$$

9. Conclure que $\big(e_1, g(e_1), \dots, g^{n-1}(e_1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
10. Soit φ un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. On pose $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$f^k = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi.$$

11. En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et que $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On a démontré que tout endomorphisme f de la forme $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ vérifie les conditions données dans l'exercice. On souhaite maintenant savoir si ce sont les seuls et on va considérer un endomorphisme f quelconque de E.

Endomorphismes nilpotents de E :

On considère un endomorphisme de E : $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$f^n = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

12. Justifier qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.

On pose pour $i = 1, \ldots, n$: $b_i = f^{i-1}(a)$. On veut prouver que la famille

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = \big(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\big)$$

est une famille libre. On considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lambda_1 a + \lambda_2 f(a) + \lambda_3 f^2(a) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(a) = 0_E. \tag{L}$$

13. Justifier rapidement que f^{n-1} est un endomorphisme de E et que $f^r(a) = 0_E$ pour tout entier $r \geq n$.
14. En composant l'égalité (L) par f^{n-1}, montrer que $\lambda_1 f^{n-1}(a) = 0_E$. En déduire que λ_1 est nul.
15. Montrer ensuite que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Conclure que $(b_1, \ldots, b_n)$ est libre.
16. Justifier que la famille précédente est alors une base de E.
17. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$f(b_i) = b_{i+1} \quad \text{et} \quad f(b_n) = 0_E.$$

On note à nouveau $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère l'unique application linéaire ψ de E dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\psi(b_i) = e_i.$$

18. Pourquoi ψ est-elle un isomorphisme ?
19. On reprend l'endomorphisme g de la partie précédente. Montrer que

$$f = \psi^{-1} \circ g \circ \psi \quad \text{et} \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = g.$$

Ainsi tous les endomorphisme cherchés sont de la forme $\psi^{-1} \circ g \circ \psi$.

Commutant d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On dit qu'un endomorphisme u de E commute avec f si

$$f \circ u = u \circ f.$$

On veut trouver une caractérisation de l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. On appelle cet ensemble le commutant de f et on le note $\mathcal{C}(f)$.

21. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
22. Soit $u \in \mathcal{C}(f)$. On utilise les notations de la partie précédente. Justifier qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(a) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

23. Calculer pour $k = 0, \ldots, n-1$ les coordonnées de $u\big(f^k(a)\big)$ dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.
24. En déduire que $u = \lambda_1 Id_E + \lambda_2 f + \cdots + \lambda_n f^{n-1}$.
25. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
26. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(f)$?

Dans le cas particulier de la dérivation des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, les seules opérations linéaires qui peuvent commuter avec la dérivation sont donc des sommes de dérivations itérées.