Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : Endomorphismes de rang 1 (adapté de e3a PC 2010)

Ce problème étudie les endomorphismes de rang 1. Les trois premières parties consistent à étudier des exemples et la partie IV est une étude théorique.

Partie I : Des suites récurrentes

On pose $u_0 = -3$, $v_0 = -2$, $w_0 = 1$ et on définit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) \end{cases}.$$

I.1.a Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$.

I.1.b En déduire, en effectuant une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n + 2w_n = 0$.

I.1.c Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 3w_n = 0$.

I.1.d Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_n$. En déduire une expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et sa limite.

I.1.e En déduire également une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et leurs limites.

On souhaite effectuer une nouvelle approche des questions précédentes.

I.2.a Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = MX_n$.

On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.2.b Calculer P^{-1}, donner l'expression, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de D^n et montrer que $M = PDP^{-1}$

I.2.c Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$ et $X_n = M^nX_0$.

I.2.d Déterminer ainsi à nouveau l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que leurs limites.

Partie II : Une matrice de carré nul

On pose

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.1 Calculer A^2 et le rang de A. A peut-elle être inversible ?

II.2 On considère f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Justifier que pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f\big((x,y,z)\big) = \left(\frac{2x-2y-z}{9}, \frac{4x-4y-2z}{9}, \frac{-4x+4y+2z}{9}\right).$$

Que vaut $f \circ f$?

On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(2,1,2)$ et $e_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1)$.

II.3 Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ (on exprimera $f(e_3)$ en fonction de e_1).

II.4 Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

II.5 Déterminer l'expression de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

II.6 Calculer le rang et la dimension du noyau de f.

II.7 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x-2y-z \end{array}.$$

Montrer que φ est une application linéaire et déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f\big((x,y,z)\big) = \varphi\big((x,y,z)\big)\, a.$$

Partie III : Matrice d'un endomorphisme de rang 1

On rappelle que $\mathbb{R}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^1$. On considère l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+2z \end{array}$$

et on pose, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = \varphi\big((x,y,z)\big)\,(0,0,1)$.

III.1 Quelle est la dimension de $\mathbb{R}$? De quel espace vectoriel $\mathrm{Im}(\varphi)$ est-il un sous-espace vectoriel ? En déduire que $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 0$ ou 1.

III.2 Montrer que $\varphi\big((0,0,1)\big) \neq (0,0,0)$. En déduire que $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 1$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = 2$.

III.3 On considère $\mathscr{B} = \big((1,-1,0),(1,0,-1),(0,0,1)\big)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.4 Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et donner le rang de f.

Partie IV : Étude théorique

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a \neq 0$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère une application linéaire **non nulle** φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \varphi(x)\, a.$$

Pour le IV.1, on pourra s'aider de l'exemple de la partie III.

IV.1.a Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

IV.1.b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$. En déduire que $\ker(f) = \ker(\varphi)$.

IV.1.c Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et déterminer, en fonction de n, la dimension de $\ker(\varphi)$ et de $\ker(f)$ puis le rang de f.

On suppose dans IV.2 que $\varphi(a) \neq 0$. On considère $e_1, \ldots, e_{n-1}$ une base de $\ker(\varphi)$ et on pose $e_n = a$. On souhaite montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

IV.2.a Montrer, en composant l'égalité précédente par φ, que $\lambda_n\, \varphi(a) = 0$ et en déduire que $\lambda_n = 0$.

IV.2.b Montrer également que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

IV.2.c En déduire que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et que la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de f est de la forme

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

On suppose dans IV.3 que $\varphi(a) = 0$.

IV.3.a Montrer que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$, l'application nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

IV.3.b Montrer qu'il existe $e_2,\dots,e_n$ vérifiant $f(e_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\big(f(e_n),e_2,\dots,e_{n-1}\big)$ est une base de $\ker(f)$.

IV.3.c Montrer que $\big(f(e_n),e_2,\dots,e_{n-1},e_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et écrire la matrice de f dans cette base.

IV.4.a On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ de rang 1. Montrer qu'il existe une application linéaire φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \varphi(x)\,a$.

IV.4.b Quelles sont les différentes formes possibles de la matrice d'un endomorphisme de rang 1 ?

Problème 2 : Fonction polylogarithme (extrait des Petites Mines 2010)

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction polylogarithme, utile en mécanique quantique, définie par :

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Étude de la fonction intégrée

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

I.1 Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

I.2 Déterminer les expressions de f', f'' et f''' et calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

I.3 Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 3 (on pourra utiliser la formule de Taylor-Young ou donner directement le résultat du cours).

On considère désormais la fonction ℓ donnée par

$$\ell(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

I.4 Justifier que ℓ est dérivable $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ et montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$:

$$\ell'(x) = \frac{h(x)}{x^2\,(1+x)}$$

où $h(x) = x-(1+x)\ln(1+x)$.

I.5 En dressant le tableau des variations de h pour en déterminer son signe, montrer que ℓ' est négative sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

I.6 Déterminer les limites de ℓ en -1 et en $+\infty$.

I.7 À l'aide de la question I.3, montrer que ℓ admet le développement limité en 0 :

$$\ell(x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

I.8 Quelle est la limite de ℓ en 0 ? Justifier que ℓ admet un prolongement par continuité sur $]-1,+\infty[$ que l'on notera à nouveau ℓ (on donnera la valeur de $\ell(0)$).

I.9 Montrer que ℓ est dérivable en 0 et déterminer $\ell'(0)$. Conclure que ℓ' est négative sur $]-1,+\infty[$.

I.10 Déterminer la position relative de la courbe de ℓ par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.

I.11 Dresser à l'aide des questions précédentes le tableau des variations de ℓ sur $]-1,+\infty[$.

I.12 Montrer que ℓ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ (pour calculer la limite de ℓ' en 0, on pourra se servir des développements limités calculés précédemment).

Partie II : Une expression de $L(1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $L(x)$ est posé au début du problème.

II.1 À l'aide de la question I.8, justifier que $L(1)$ est bien défini.

II.2 Justifier que pour tout réel t différent de -1 :

$$1-t+t^2+\cdots+(-t)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k=\frac{1-(-t)^n}{1+t}.$$

II.3 En déduire, en écrivant $\dfrac{1-(-t)^n}{1+t}=\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$, que pour tout $x\in[0,1]$:

$$\int_0^x\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\,\mathrm{d}t=\ln(1+x)-(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

II.4 Justifier que pour tout $x\in[0,1]$:

$$\int_0^x\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

II.5 En reprenant la notation ℓ de la partie I, montrer, avec II.3 et II.4, que pour tout $x\in]0,1]$,

$$\ell(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k+1}=\frac{(-1)^n}{x}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

II.6 En justifiant que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right|\leq t^n$, montrer que pour tout $x\in]0,1]$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{x}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{x^n}{n+1}.$$

II.7 En déduire que pour tout $x\in[0,1]$:

$$\left|\ell(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k+1}\right|\leq\frac{x^n}{n+1}$$

puis que

$$\left|\int_0^1\ell(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1\frac{x^k}{k+1}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1\frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

II.8 Montrer ainsi que :

$$\left|L(1)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^2}.$$

II.9 Conclure que $L(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dfrac{1}{(k+1)^2}$ et

$$L(1)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

Partie III : Dérivées successives de L

III.1 À l'aide de I.8, justifier que L est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la dérivée de L ? Que vaut $L(0)$?

III.2 Justifier que ℓ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En déduire que L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et donner une relation entre les dérivées successives de L et de ℓ.

On souhaite démontrer par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : il existe un polynôme à coefficients réels $T_n\in\mathbb{R}[X]$ et un réel a_n tels que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$:

$$\ell^{(n)}(x)=\frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n}+a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

III.3 Montrer que la propriété est vraie pour $n=1$ (on pourra revoir I.4). Que valent T_1 et a_1 ?

III.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$

$$\ell^{(n+1)}(x) = \frac{T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}\,x^{n+1}} - (n+1)\,a_n\,\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}.$$

III.5 Conclure la récurrence en donnant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre T_{n+1}, T_n, T_n' et a_n et entre a_n et a_{n+1}. Donner ainsi une expression simple de a_n.

III.6 Montrer que T_n est à coefficients entiers.