Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : Racines de matrices (adapté de CCP PC 2010)

Le but du problème est de déterminer, pour certaines matrices A, l'ensemble de toutes les matrices M vérifiant $M^2 = A$. Les parties I et II étudient deux exemples particuliers. La partie III étudie un exemple sous un angle théorique et une interprétation en termes d'endomorphismes. La partie IV établit des résultats théoriques.

Partie I : Un exemple en dimension 2

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on considère une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, vérifiant $M^2 = A$.

I.1 Montrer que

$$\begin{cases} a^2 + bc &= -1 \\ d^2 + bc &= -1 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \end{cases}.$$

I.2 Montrer que les cas $b = 0$ ou $c = 0$ sont impossibles. On suppose donc que $b, c \neq 0$ dans la suite.

I.3 En déduire que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$$

I.4 Combien l'équation d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $M^2 = A$ a-t-elle de solutions ?

Partie II : Un exemple en dimension 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et on considère à nouveau une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

II.1 Calculer P^{-1} et montrer que $PAP^{-1} = D$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

II.2 On pose $H = PMP^{-1}$. Montrer que $M = P^{-1}HP$, $H^2 = PM^2P^{-1}$ puis que $H^2 = D$.

II.3 Montrer que $HD = DH$.

II.4 Montrer que H est nécessairement diagonale (*Indication : on écrira H sous forme de coefficients à déterminer puis on écrira les 9 équations résultant de l'égalité $HD = DH$.*)

II.5 Avec la question précédente et en écrivant que $H^2 = D$, montrer qu'il n'existe que 4 solutions pour H.

II.6 Conclure, avec II.2, que M est l'une des matrices suivantes :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II.7 Combien l'équation d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $M^2 = A$ a-t-elle de solutions ?

Partie III : Un exemple en termes d'endomorphismes

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on notera f et j les endomorphismes canoniquement associés respectivement aux matrices A et J.

III.1 Exprimer, en fonction de J, J^m pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (on pourra effectuer une récurrence).

III.2 À l'aide de la formule du binôme et de $A = I_3 + J$, exprimer, pour $m \in \mathbb{N}^*$, A^m en fonction de I_3 et J.

III.3 En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$f^m = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{3}(4^m - 1)\, j$$

où $Id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Cette formule est-elle valable pour $m = 0$?

III.4 On pose $p = \frac{1}{3}\, j$ et $q = Id_{\mathbb{R}^3} - p$. Exprimer, en fonction de p et q, p^2 et q^2.

III.5 En déduire que $\mathbb{R}^3 = \ker(p) \oplus \ker(q)$.

III.6 Justifier que p est de rang 1 et donner la dimension du noyau de p.

III.7 Montrer qu'il existe $e_1, e_2 \in \ker(p)$ et $e_3 \in \ker(q)$ tels que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.8 Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f^m = q + 4^m p$.

III.9 Calculer $p(e_i)$ et $q(e_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ puis exprimer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

III.10 Construire un endomorphisme $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $h^2 = f$. On exprimera h en fonction de p et q.

Partie IV : Un résultat général

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \neq \mu$ deux réels et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes **non nuls** de $\mathbb{R}^n$ p et q vérifiant les trois égalités

$$p + q = Id_{\mathbb{R}^n}, \quad \lambda\, p + \mu\, q = f, \quad \text{et} \quad \lambda^2 p + \mu^2 q = f^2$$

où $Id_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

IV.1 En utilisant les trois relations de l'énoncé et en développant, montrer que

$$(f - \lambda\, Id_{\mathbb{R}^n}) \circ (f - \mu\, Id_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)},$$

l'application nulle de $\mathbb{R}^n$.

IV.2 Exprimer $(f - \lambda\, Id_{\mathbb{R}^n})$ en fonction de q, λ et μ et $(f - \mu\, Id_{\mathbb{R}^n})$ en fonction de p, λ et μ.

IV.3 Déduire des deux questions précédentes que $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ et que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.

IV.4 En utilisant que $p + q = Id_{\mathbb{R}^n}$ et la question précédente, montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

IV.5 On considère $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\ker(p)$ et $(f_1, \ldots, f_s)$ une base de $\ker(q)$. Justifier que la famille de vecteurs $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Que vaut $r + s$?

IV.6 Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale de la forme :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r \text{ colonnes}}$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(p, q)$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$). On souhaite déterminer tous les éléments $h \in F$ qui vérifient $h^2 = f$.

IV.7 Quelle est la dimension de F ?

IV.8 Montrer que, si $h \in F$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ (utiliser IV.3).

IV.9 En déduire que si λ ou μ est strictement négative, il n'existe aucun élément de $h \in F$ vérifiant $h^2 = f$.

IV.10 Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur λ et μ pour qu'il existe des endomorphismes $h \in F$ vérifiant $h^2 = f$ et, dans ce cas, donner leur nombre.

IV.11 Si $n \geq 3$, montrer qu'il existe un endomorphisme $h \notin F$ vérifiant $h^2 = f$.

Problème 2 : Inégalité de Berstein (adapté de Centrale PC 2010)

Le but du problème est de montrer une inégalité sur certains types de fonctions modélisant la propagation des ondes. On étudie d'abord en partie I certains polynômes dont les racines serviront en partie II à étudier quelques propriétés de ces fonctions. La partie III permet de démontrer finalement l'inégalité.

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $T_n(t) = \cos\big(n \arccos(t)\big)$.

I.1 Justifier que T_n est définie sur $[-1,1]$ et rappeler la simplification de $\cos\big(\arccos(x)\big)$ pour $x \in [-1,1]$.

I.2 Donner l'expression de T_0 et T_1 et montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$.

I.3 Calculer $T_n(0)$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.4 Rappeler l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction arccos.

I.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $t \in]-1,1[$:

$$T_n'(t) = \frac{n \sin\left(n \arccos(t)\right)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Calculer également T_n'' sur $]-1,1[$.

I.6 En faisant le changement de variable $t = \cos x$, montrer que $\arccos(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-t)}$.

I.7 En déduire que T_n est dérivable en 1 et la valeur de $T_n'(1)$.

I.8 Avec les questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]-1,1[$:

$$(1-t^2)\, T_n''(t) - t\, T_n'(t) + n^2\, T_n(t) = 0.$$

I.9 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que T_n est une fonction polynomiale (on exprimera, avec la question précédente, T_n en fonction de ses dérivées et on effectuera une récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$).

I.10 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de T_n.

I.11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

I.12 Pour $n \in \mathbb{N}$, quels sont les réels $x \in [0,\pi]$ vérifiant $\cos(nx) = 0$?

I.13 En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la factorisation de T_n : pour tout $t \in [-1,1]$,

$$T_n(t) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

(on ne demande pas la valeur de a_n).

Partie II : Polynômes trigonométriques

On appelle polynôme trigonométrique de degré $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction de la forme

$$\varphi : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)\big)$$

où a_0, a_k, b_k sont des réels, $k \in [\![1,n]\!]$. On considère un polynôme trigonométrique φ de la forme précédente.

II.1 Montrer φ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.2 Justifier que $|\varphi|$ et $|\varphi'|$ atteignent leur maximum sur $[0,2\pi[$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} (a_k + i b_k)\, e^{ikx} - \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} (a_k - i b_k)\, e^{-ikx}.$$

II.4 En déduire qu'il existe des nombres complexes $c_{-n},\dots,c_0,\dots,c_n$ vérifiant pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

qu'on exprimera, en distinguant les cas, en fonction de a_k et b_k.

II.5 En déduire qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=e^{-inx}P(e^{ix})$ où

$$P(X)=\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n}X^k.$$

Combien P possède-t-il au plus de racines complexes distinctes ?

II.6 Montrer que si φ s'annule au moins $2n+1$ fois dans $[0,2\pi[$ alors φ est nulle sur $\mathbb{R}$.

II.7 Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré n est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Partie III : Inégalité de Bernstein

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère à nouveau un polynôme trigonométrique φ de degré n non nul et on suppose (les existences étant justifiées par la question II.2) que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|=1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|=\varphi'(0).$$

On souhaite montrer que $\varphi'(0)\le n$ et on va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\varphi'(0)>n.$$

On considère la fonction

$$S: x\mapsto \frac{\varphi'(0)}{n}\sin(nx)-\varphi(x)$$

et on note, en relation avec la partie I, pour $k\in\mathbb{Z}$: $x_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

III.1 Justifier que S, S' et S'' sont des polynômes trigonométriques de degré n.

III.2 Montrer que pour $k\in\mathbb{Z}$:

$$S(x_k)=\frac{(-1)^k}{n}\big(\varphi'(0)-(-1)^k n\,\varphi(x_k)\big).$$

III.3 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(0)-(-1)^k n\,\varphi(x)>0$.

III.4 En déduire, pour $k\in\mathbb{Z}$, le signe de $S(x_k)$ et montrer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, il existe $y_k\in]x_k,x_{k+1}[$ tel que

$$S(y_k)=0.$$

III.5 Justifier que $y_1,\dots,y_{2n-1}\in[0,2\pi[$ et que y_0 ou $y_0+2\pi$ est dans $[0,2\pi[$. En déduire que S s'annule au moins $2n$ fois sur $[0,2\pi[$.

III.6 En déduire, en citant précisément le théorème, que S' s'annule au moins $2n-1$ fois sur $]0,2\pi[$.

III.7 Calculer $S'(0)$ et $S'(2\pi)$ et montrer que S' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0,2\pi]$.

III.8 Montrer que S'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0,2\pi[$ (on calculera $S''(0)$). En déduire, à l'aide de II.6, que $\varphi'(0)\le n$.

III.9 Montrer, de façon générale, l'inégalité de Bernstein : pour tout polynôme trigonométrique f

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\le n\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$$

III.10 Donner une fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.