Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité ainsi que la dérivée de exp, ln et racine carrée.
2. Énoncer la définition de la valeur absolue d'un réel x.
3. Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour deux réels x et y.

Exercice 1 : Une limite

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence et calculer la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

1. En dressant le tableau des variations de la fonction f, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = e^x - 1 - x$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$1 + x \leq e^x.$$
On utilisera notamment la valeur de $f(0)$.
2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Montrer avec 1. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$ puis que, pour $x \in]-\infty, 1[$:
$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $x \in]-\infty, 1[$:
$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}.$$
4. En déduire un encadrement, pour $x \in]0,1[$ puis pour $x \in]-\infty, 0[$ de $\dfrac{e^x-1}{x}$.
5. Conclure quant à l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ? Sur quel ensemble sont-elles continues ? dérivables ?
2. Déterminer les limites de ch et de sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Exprimer simplement les dérivées de ch et de sh.
4. Quel est le signe de la fonction ch ? Donner la valeur de $\mathrm{sh}(0)$. En déduire le tableau des variations de sh ainsi que son signe (on indiquera les limites dans le tableau).
5. Construire également le tableau des variations de ch (on indiquera les limites dans le tableau).
6. Tracer sur un même dessin l'allure des courbes représentatives de ch et sh.

On considère $\mathscr{H}$, l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x_M, y_M) vérifiant :

$$x_M^2 - y_M^2 = 1. \tag{1}$$

7. Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et des ordonnées.

8. On considère la fonction $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de g et calculer sa dérivée.
9. Déterminer la parité de g.
10. g est-elle dérivable en 1 ? On justifiera précisément la réponse.
11. Montrer que $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ et $x \mapsto g(x) - x$ admettent des limites en $+\infty$ que l'on calculera. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g ?
12. Tracer $\mathscr{C}_g$ et, à l'aide de cette courbe, représenter, en justifiant, l'ensemble $\mathscr{H}$ sur le même dessin.
13. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que si M a pour coordonnées $(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$, alors $M \in \mathscr{H}$ (utiliser l'équation 1).
14. Avec les notations de la question précédente, que vaut l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$?
15. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{H}$, il existe $t_M \in \mathbb{R}$ tel que M a pour coordonnées $(\mathrm{ch}(t_M), \mathrm{sh}(t_M))$.
16. Justifier le titre de l'exercice.

Exercice 3 : Fonctions homographiques

On étudie d'abord un premier exemple dans les questions 1 à 4. On définit la fonction f, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{-x+2}.$$

1. Justifier que $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble de définition de f. Sur quel ensemble f est-elle continue ?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est calculer sa dérivée. En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 2^- et 2^+.
4. Dresser finalement le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative.

On traite désormais le cas général d'une fonction homographique. On appelle fonction homographique une fonction de la forme

$$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c, d sont des réels fixés et $c \neq 0$. On considère dans la suite quatre réels a, b, c, d avec $c \neq 0$ et $f_{a,b,c,d}$ une fonction homographique. Par exemple, la fonction f étudiée précédemment est une fonction homographique avec $a = 2, b = -1, c = -1, d = 2$.

5. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$, de $f_{a,b,c,d}$ en fonction de c et d.
6. Déterminer les limites de $f_{a,b,c,d}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ en fonction de a, b, c, d.
7. Justifier que $f_{a,b,c,d}$ est dérivable sur son domaine de définition et montrer que sa dérivée est de la forme : pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,
$$f'_{a,b,c,d}(x) = \frac{ad-bc}{g(x)}$$
où g est une fonction que l'on explicitera.
8. Déterminer la monotonie de $f_{a,b,c,d}$ (on distinguera trois cas).
9. On considérant le cas particulier $ad - bc > 0$, tracer l'allure de la courbe de $f_{a,b,c,d}$ (on placera des points particuliers qui dépendent de a, b, c, d).
10. Montrer que la composée de deux fonctions homographiques est une fonction homographique.
11. En supposant que $ad - bc \neq 0$, déterminer l'expression d'une fonction g, dépendant de a, b, c, d telle que, pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$:
$$g \circ f_{a,b,c,d}(x) = x.$$
12. Montrer que $f_{a,b,c,d}$ réalise une bijection entre $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$ et un ensemble que l'on précisera. Exprimer son application réciproque à l'aide de la question précédente.
