Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 3 exercices et un problème indépendants.

Questions de cours

1. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction arctan ainsi que l'expression de sa dérivée.
2. Donner les limites de la fonction arctan aux bornes de son intervalle de définition.
3. Donner l'ensemble de définition de la fonction arccos et préciser pour quels intervalles I et J, on a, pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$: $y = \cos x \Longleftrightarrow x = \arccos y$.

Exercice 1 : Une fonction bornée.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathscr{D}(f)$, et la parité de f.
2. Montrer que f est 2π-périodique.
3. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition, exprimer sa dérivée et montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$ (on pourra utiliser la formule pour $\cos^2 + \sin^2 = \cdots$).
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
5. Justifier que f est une fonction bornée sur $\mathscr{D}(f)$.

Exercice 2 : Étude de la fonction $\arccos \circ \cos$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \arccos\big(\cos x\big)$.

1. Rappeler les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur de $f(-\frac{\pi}{4})$ (attention : $-\frac{\pi}{4} \notin [0, \pi]$).
2. Quel est l'ensemble de définition de f (on justifiera la réponse) ?
3. Déterminer la parité de f.
4. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ (on utilisera notamment la question précédente).
5. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = ax + b$ où a, b sont à déterminer.
6. Représenter sur un graphique, en justifiant la construction à l'aide des questions précédentes, la courbe représentative de la fonction f.
7. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Une bijection.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$\frac{x}{1 + x^2} < \arctan x.$$
2. Que vaut $\arctan'(0)$? Montrer, en utilisant le taux de variation de la fonction arctan en 0 que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$ et déterminer, à l'aide de la question 1, le signe de cette dérivée.

5. En déduire que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
6. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\arctan x = \dfrac{\pi}{4}x$.

Problème : Fonctions sigmoïdes

Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée (on simplifiera au maximum l'expression de sa dérivée). Déterminer également la parité de th.
2. Déterminer le signe de la dérivée, calculer les limites de th en $+\infty$ et $-\infty$, dresser le tableau des variations de th et tracer une allure de la courbe représentative de th.

Fonction sigmoïde

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre **fixé**. On définit la fonction f_λ par

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}.$$

3. Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f_λ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la monotonie de f_λ et calculer les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on distinguera trois cas).
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{th}\left(\frac{\lambda x}{2}\right).$$
6. On suppose que $\lambda > 0$. Comment déduit-on simplement l'allure de la courbe représentative de f_λ à partir de la question 2 ? Quelle symétrie possède-t-elle (on justifiera sa réponse) ? Tracer une allure de cette courbe.

Équation différentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées et dont les éventuelles solutions sont des **fonctions**. Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle d'inconnue f avec une condition initiale :

$$f' = \lambda f(f-1) \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}. \tag{E}$$

On admettra qu'une solution de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \frac{1}{f} - 1$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de
$$g' + \lambda g = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1. \tag{E'}$$
8. Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si g est la fonction
$$x \mapsto e^{-\lambda x}.$$
On pourra étudier la fonction $h : x \mapsto e^{\lambda x} g(x)$.
9. À l'aide de la partie précédente, résoudre complètement l'équation (E).

Les fonctions sigmoïdes modélisent l'évolution du pH en fonction de la quantité de solution introduite dans le mélange lors d'un titrage acido-basique que vous verrez au cours de l'année en chimie.
