Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 2 exercices et un problème indépendants.

Dans tout le devoir, le plan complexe est rapporté un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Questions de cours

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en distinguant le cas $z=1$ et $z\neq 1$, l'expression de $\sum_{k=0}^{n} z^k$.
2. Pour $a,b\in\mathbb{R}$, donner la formule de $\cos(a+b)$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelles sont les solutions de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $z^n=1$?

Exercice 1 : Une équation trigonométrique

On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$1-\cos(x)+\cos(2x)=0. \tag{E}$$

1. On considère $f: x\mapsto 1-\cos(x)+\cos(2x)$. Montrer que la fonction f est 2π-périodique. Si on résout (E) pour $x\in]-\pi,\pi]$, comment obtient-t-on toutes les solutions sur $\mathbb{R}$?
2. Linéariser, pour $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x$. En déduire une réécriture de l'équation (E).
3. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si

$$\cos x=0 \quad \text{ou} \quad \cos x=\frac{1}{2}.$$

4. En déduire les solutions de (E) pour $x\in]-\pi,\pi]$.
5. Résoudre finalement (E) pour $x\in\mathbb{R}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$1-\cos(x)+\cos(2x)-\cdots+\cos(2nx)=0. \tag{E'}$$

qui peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\cos(kx)=0. \tag{E'}$$

6. En justifiant que pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$, $\cos(k\pi)=(-1)^k$, montrer que $x=\pi$ n'est pas solution de (E').
7. Montrer qu'il suffit de résoudre (E') pour $x\in]-\pi,\pi[$.
8. Démontrer les trois égalités, pour $x\in]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k e^{ikx}=\sum_{k=0}^{2n}\left(-e^{ix}\right)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n}\left(-e^{ix}\right)^k=\frac{\left(-e^{ix}\right)^{2n+1}-1}{-e^{ix}-1}=\frac{e^{i(2n+1)x}+1}{e^{ix}+1}.$$

9. En déduire que pour tout $x\in]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k e^{ikx}=e^{inx}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

10. Montrer que $x\in]-\pi,\pi[$ est solution de (E') si et seulement si

$$\cos(nx)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)=0.$$

11. Résoudre finalement (E') pour $x\in]-\pi,\pi[$ puis pour $x\in\mathbb{R}$. Est-ce cohérent avec la question 5 ?

Exercice 2 : Géométrie du triangle

On considère trois points du plan complexe distincts A, B, C sur le cercle de centre O et de rayon 1 d'affixes respectifs a, b, c et on pose

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Mettre j sous forme exponentielle. Que vaut $1 + j + j^2$? Que valent $\left|\frac{b}{a}\right|$ et $\left|\frac{c}{a}\right|$?
2. Que représentent géométriquement $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$ et $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$?
3. On suppose uniquement dans cette question que $a = 1$, $b = j$ et $c = \overline{j}$. Faire un dessin et déterminer la nature du triangle ABC (on pourra conjecturer sur le dessin puis on fera une démonstration).
4. Montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ si seulement si $b = ja$
5. Déterminer également une condition nécessaire et suffisante sur a et c pour que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.
6. Justifier que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si l'une des deux conditions est réalisée
   (i) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$;
   (ii) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.
7. En déduire que si ABC est équilatéral alors $a + b + c = 0$.
8. Montrer qu'en fait ABC est équilatéral si et seulement si $a + b + c = 0$.

Problème : Méthode de Cardan et théorème de d'Alembert-Gauss pour le degré 3.

Ce problème est consacré à l'étude générale des équations polynomiales de degré 3 d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Premier cas particulier : $a = b = 0$ et $c = -27$.

On souhaite ici résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 = 27$ (E_1).

1. Déterminer z_0 tel que $z_0^3 = 27$.
2. En déduire que résoudre l'équation (E_1) revient à résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1.$$
3. Déterminer finalement les solutions de l'équation (E_1). Combien y en a-t-il ?

Second cas particulier : $a = 0$, $b = -18$, $c = -35$.

On souhaite ici résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 18z - 35 = 0. \qquad \text{(E2)}$$

5. Montrer que $-6\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 35 < 0$. $-\sqrt{6}$ est-elle une solution ?
6. Montrer que (E2) a une unique solution réelle (prendre $z = x \in \mathbb{R}$ et étudier une fonction).

On suppose que dans l'équation (E2), il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $z = u + v$ et $uv = 6$.

7. Simplifier u^2v et uv^2.
8. En déduire que $u^3 + v^3 = 35$ (prendre $z = u + v$ dans l'équation (E2) et développer). Que vaut u^3v^3 ?
9. En développant, pour $X \in \mathbb{C}$, $(X - u^3)(X - v^3)$, montrer que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{C}$:
$$X^2 - 35X + 216 = 0.$$

10. En déduire les valeurs possibles pour u^3 et v^3 (remarquer que $19^2 = 361$).
11. Déterminer les valeurs possibles pour u et v (attention $u, v \in \mathbb{C}$ et $uv \in \mathbb{R}^+$).
12. En admettant que (E2) possède au plus trois racines complexes distinctes, résoudre complètement (E2).

Théorème de d'Alembert-Gauss pour le degré 3 dans le cas réel.

On démontre ici un analogue du théorème pour les trinômes du second degré mais pour le degré 3 sans donner la forme des solutions : la forme des solutions est l'objet de la partie suivante.

13. Montrer que l'équation (E) a au moins une solution réelle que l'on notera α.
14. Montrer que si $\alpha \neq 0$, $\alpha^2 + a\alpha + b = \frac{-c}{\alpha}$.
15. En déduire que l'équation (E) se réécrit
$$(z-\alpha)(a'z^2 + b'z + c') = 0$$
où on donnera une expression de a', b', c' en fonction de a, b, c.
16. Conclure qu'on a nécessairement un des quatre cas suivants :
    (i) (E) admet une unique racine réelle triple ;
    (ii) (E) admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées ;
    (iii) (E) admet deux racines réelles distinctes (dont une double) ;
    (iv) (E) admet trois racines réelles distinctes.

Cas général : méthode de Cardan.

17. Montrer qu'on peut ramener l'équation (E), en posant $z = Z - \frac{a}{3}$ à la résolution de
$$Z^3 + pZ + q = 0 \tag{E'}$$
où $p = \frac{-a^2}{3} + b$ et $q = \frac{a}{27}(2a^2 - 9b) + c$. On résout désormais cette équation.
18. Montrer que si $Z \in \mathbb{C}$, on peut choisir $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $Z = u + v$ et $uv = -\frac{p}{3}$.
19. En déduire que $u^3 + v^3 = -q$.
20. Conclure, en s'inspirant de la question 5, que u et v sont les racines de l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{C}$:
$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On suppose que le discriminant Δ de cette dernière équation vérifie $\Delta > 0$.

21. Déterminer les valeurs possibles pour u^3 et v^3. On exprimera Δ en fonction de p et q puis u^3 et v^3 en fonction de Δ et q.
22. Justifier que pour tout nombre réel x_0, il existe un unique réel x tel que $x^3 = x_0$ qu'on notera $\sqrt[3]{x_0}$. En déduire les valeurs possibles pour u et v.
23. Conclure que les solutions de l'équation (E') sont
$$\begin{cases} z_1 = & \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} \\ z_2 = & j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \bar{j}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} \\ z_3 = & j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \overline{j^2}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases}$$
où on a noté comme dans l'exercice 2 : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
24. Traiter également les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.