Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 3 exercices et un problème indépendants.

Questions de cours

1. Écrire, pour deux fonctions f, g de classe $\mathbb{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, la formule d'intégration par parties.
2. Une suite décroissante peut-elle ne pas avoir de limite (on pourra citer le théorème de la limite monotone pour une suite décroissante pour justifier sa réponse) ?
3. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions (en réel) de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Exercice 1 : Équation de Bernoulli

Le but de l'exercice est de résoudre, en supposant que z est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas sur l'intervalle $]0,+\infty[$, le problème de Cauchy d'inconnue z :

$$\mathscr{P}\begin{cases} z' + \dfrac{2}{x}z + x^3 z^2 = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[, \\ z(1) = 2. \end{cases}$$

Ce problème n'est pas de la forme du cours et on étudie d'abord une autre équation différentielle pour le résoudre. On pose dans la suite $I =]0,+\infty[$.

1. Déterminer, en justifiant son existence, une primitive A sur I de $a : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$.
2. Déterminer ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'inconnue y :
$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 \quad \text{sur } I.$$
3. En déduire que l'unique solution du problème de Cauchy
$$\mathscr{P}_0\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}y = x^3 \quad \text{sur }]0,+\infty[, \\ y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
est la fonction $y : x \mapsto \frac{x^4}{2}$.
4. Soit z une solution de $\mathscr{P}$ ne s'annulant pas sur I, on pose $y = \dfrac{1}{z}$. Justifier que y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que y est solution de $\mathscr{P}_0$.
5. Déterminer l'unique solution de $\mathscr{P}$ sur I.
6. Cette solution est-elle bornée sur I ?

Les équations différentielles de Bernoulli, comme dans $\mathscr{P}$, régissent notamment des potentiels en mécanique.

Exercice 2 : Une étude de suite récurrente

On pose $u_0 = -3$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2 - u_n^2.$$

On considère la fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$.

1. Montrer que f est paire et établir le tableau des variations de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de $]-\infty,-2[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ alors $\ell = 2 - \ell^2$. Quelles sont les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas ?

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq -3$.
5. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, -2[$: $f(x) < x$.
6. En déduire que (u_n) est décroissante.
7. Conclure quant à la limite de (u_n) (on pourra utiliser la question 3 et la seconde question de cours).

On suppose dans la deux question suivante de façon plus générale que $u_0 < -2$ ou que $u_0 > 2$.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < -2$ et déterminer la limite de (u_n).

On suppose dans les deux questions suivantes que $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1} (on pourra calculer u_2, u_3, u_4, u_5 pour conjecturer le résultat).
10. La suite (u_n) est-elle convergente dans ce cas ?

Cet exercice est une étude de système dynamique qui a des comportements différents selon la valeur de u_0.

Exercice 3 : Une étude de suite implicite

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n :

$$\varphi_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le domaine de définition de φ_n et le tableau des variations de φ_n.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [0,1[$ tel que $\varphi_n(x_n) = 0$.

La question précédente permet ainsi de définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent $\varphi_n(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$? Simplifier $\varphi_{n+1}(x_n)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi_{n+1}(x_n) \geq \varphi_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée puis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite $\ell \in [0,1]$.
7. Supposons que $\ell > 0$. En déterminant les limites de $(x_n^5 - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(-nx_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, aboutir à une contradiction. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. En utilisant la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.
9. Montrer de plus que :
$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Problème : Suites d'intégrales et irrationalité de $\ln 2$.

Partie I : Une expression de $\ln 2$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1 (pour I_1, on pourra déterminer un réel A tel que pour tout $t \in [0,1]$: $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{A}{1+t}$).
3. En faisant le changement de variable $y = 1+t$, montrer que

   $$I_2 = \int_1^2 (y - 2 + \frac{1}{y})\ \mathrm{d}y$$

   puis la valeur de I_2.
4. Montrer, en justifiant, que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}.$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t.$$

6. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$ pour en déduire l'encadrement

   $$0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}.$$

8. Justifier la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
9. Conclure en montrant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$:

   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

   est convergente et déterminer sa limite.

Partie II : Développement en série entière du logarithme.
Cette partie, plus difficile, généralise le résultat précédent. On pourra s'inspirer des questions précédentes pour les résoudre. Soit $x \in]0,1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la somme, pour $t \in]0,+\infty[$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-xt)^k$, montrer que

    $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(xt)^{n+1}}{1+xt}\ \mathrm{d}t$$

11. En faisant par exemple le changement de variable $y = xt$, montrer que

    $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

12. Montrer l'encadrement, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(xt)^{n+1}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}$.
13. Conclure, en justifiant les existences que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1} = \ln(1+x).$$

Partie III : Irrationalité de $\ln 2$.

On veut montrer que $\ln 2$ est irrationnel en raisonnant par l'absurde. Comme $\ln 2 > 0$, on suppose donc qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\ln 2 = \frac{p}{q}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, e^{t\ln 2}\mathrm{d}t.$$

14. Calculer J_0 et J_1.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n > 0$.
16. En encadrant la fonction dans l'intégrale de J_n, montrer que pour tout $D \in \mathbb{R}$, $D^n J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
17. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)\,q^2}{p^2} J_{n+1}.$$

18. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right].$$

19. Montrer que si $D = 2p^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D^n J_n \in \mathbb{N}^*$.
20. À l'aide de la question précédente et de la question 16, conclure quant à l'irrationalité de $\ln 2$.
