Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 2 exercices et un problème indépendants.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une matrice inversible ainsi que deux critères d'inversibilité.
2. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Donner un équivalent de $\sin u_n$, $\tan u_n$, $\ln(1+u_n)$ et $(1+u_n)^\alpha - 1$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 1 *: Suites récurrentes et matrices*

On pose $a_0 = b_0 = c_0 = 1$. On définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n - 2c_n \\ b_{n+1} &= a_n + 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= a_n + 4c_n \end{cases}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la matrice colonne donnée par :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer a_1, b_1, c_1. Que valent X_0 et X_1 ?
2. On considère $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A X_n$ où A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.
4. Montrer que $A = 2I_3 + J$.
5. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $X_n = A^n X_0$ et que
$$A^n = 2^n I_3 + (3^n - 2^n) J$$
6. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} a_n &= 2^n - 3(3^n - 2^n) = 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ b_n &= 2^n + 3(3^n - 2^n) = 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ c_n &= 2^n + 3(3^n - 2^n) = 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{cases}$$
7. Résoudre le système linéaire
$$(S) \begin{cases} x - 2z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ x + 4z &= 0 \end{cases}.$$
8. Déduire de la question précédente que A est inversible et déterminer l'inverse de A.
9. On considère dans cette question et la suivante que a_0, b_0, c_0 sont quelconques. Si $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, que valent a_0, b_0, c_0 (on pourra se souvenir que $X_1 = A X_0$).
10. De façon plus générale, si pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = c_n = 1$, que valent a_0, b_0, c_0.

De telles suites sont utilisées en économie et sont appelées séries chronologiques.

Exercice 2 *: Inégalité arithmético-géométrique (adapté CCP PC)*

Convexité

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On veut montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$e^{ta + (1-t)b} \leq t e^a + (1-t) e^b. \tag{1}$$

On pose pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = t e^a + (1-t) e^b - e^{ta+(1-t)b}$.

1. Montrer, en étudiant rapidement $x \mapsto e^x - (1+x)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.
2. Justifier g est dérivable deux fois sur $[0,1]$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t) = e^a - e^b - (a-b)\, e^{t\,a+(1-t)\,b}$. Calculer également g'' (on rappelle que a et b sont **fixés**).
3. En déduire que g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.
4. Montrer, avec la question 1, que $g'(0) = e^b\big(e^{a-b} - 1 - (a-b)\big) > 0$ et déterminer aussi le signe de $g'(1)$.
5. Justifier, en citant le théorème utilisé, qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
6. Construire un tableau sur $[0,1]$ faisant apparaître α, le signe de g'', les variations de g', le signe de g' et les variations de g.
7. Calculer $g(0)$ et $g(1)$ puis conclure.

Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}\right). \tag{2}$$

8. En appliquant (**??**) pour $t = \frac{1}{2}$, montrer le résultat demandé pour $n = 2$.
9. Montrer le résultat (**??**) par récurrence. Pour montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$,
$$e^{\frac{n}{n+1}\left[\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right]+\frac{x_{n+1}}{n+1}} \leq \frac{n}{n+1}\, e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} + \frac{1}{n+1}\, e^{x_{n+1}},$$
on pourra utiliser le résultat (**??**) avec $t = \frac{n}{n+1}$.
10. *Application :* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+,*}$,
$$(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Problème *Étude de $u_{n+1} = \sin u_n$ (adapté divers concours PSI)*

Partie I : Une limite

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On souhaite montrer dans cette première partie que

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

pour déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

1. Justifier que $\varphi : t \mapsto \dfrac{(x-t)^5}{120}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer φ', φ'', φ''', $\varphi^{(4)}$ et $\varphi^{(5)}$ (on prendra garde au fait que x est **fixé**).
2. En effectuant deux intégrations par parties, montrer que :
$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{(x-t)^3}{6}(-\cos t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{6} - \left[\frac{(x-t)^2}{2} \sin t\right]_0^x - \int_0^x (x-t)\, \sin t \,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que
$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{6} - x + \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t.$$
4. Justifier le signe de l'intégrale de gauche de l'égalité précédente.
5. Conclure que
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

6. En réemployant les techniques des quatre questions précédentes, montrer que $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
7. En justifiant l'inégalité, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$-\frac{1}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^3} \leq -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120},$$

   déterminer, en citant précisément le ou les théorèmes utilisés, l'existence et la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Partie II : Une suite récurrente On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

8. Montrer que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
9. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
10. En justifiant que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x < x$ montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
11. En précisant le théorème utilisé, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite que l'on notera ℓ et que l'on calcule ensuite.
12. Donner un encadrement de ℓ et justifier que $\sin(\ell) = \ell$
13. Conclure que $\ell = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\ell > 0$).

Partie III : Détermination d'un équivalent de la suite

14. Montrer que $u_{n+1} = \sin(u_n) \sim u_n$ et justifier précisément que $u_{n+1} + u_n \sim 2u_n$.
15. Déduire de la question précédente que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{(u_{n+1} + u_n)(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1}^2 u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\frac{u_n - \sin(u_n)}{u_n^3}$$

   et déduire du résultat de la partie I la limite de cette quantité.

On admet le théorème de Cesàro (fait dans le TD sur les suites) : si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

est convergente de limite ℓ.

16. Montrer l'existence et la valeur de $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3}$.
17. En déduire que

$$\frac{1}{n u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

   et donner un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
18. Démontrer le théorème de Cesàro admis dans l'énoncé.