Questions de cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Donner les développements limités de cos et sin en 0 à l'ordre 3.
3. Que dire d'un polynôme de degré au plus n qui a au moins $n+1$ racines distinctes ?

Exercice 1 : *Interpolation polynomiale*

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$L_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X), \quad L_2(X) = 1 - X^2, \quad \text{et} \quad L_3(X) = \frac{1}{2}(X^2 + X).$$

1. Déterminer les racines et le degré de L_1, L_2 et L_3.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

2. Montrer que $P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $Q(X) = P(X) - [P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)]$. Quel est au plus le degré de Q ? Montrer que -1, 0 et 1 sont racines de Q.
4. En déduire que Q est nul puis que :

$$P(X) = P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)$$

5. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(-1) = P(1) = 0$ et $P(0) = 2$ dont on donnera l'expression.

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$H_1(X) = 1 - X^2, \quad H_2(X) = X - X^2, \quad \text{et} \quad H_3(X) = X^2.$$

6. En introduisant un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(0)H_1(X) + P'(0)H_2(X) + P(1)H_3(X).$$

7. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = 0$ dont on donnera l'expression.

On considère deux réels $a < b$ et les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$K_1(X) = 1 - \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}, \quad K_2(X) = (X-a)\left[1 - \frac{X-a}{b-a}\right], \quad \text{et} \quad K_3(X) = \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}.$$

8. Calculer les valeurs de K_1, K_2, K_3 en a et en b et de K_1', K_2', K_3' en a.
9. En introduisant à nouveau un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(a)K_1(X) + P'(a)K_2(X) + P(b)K_3(X).$$

Exercice 2 : *Accélération de convergence*

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

3. Déterminer le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de
$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1.$$
4. En déduire les deux égalités
$$f(x) = e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
5. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.
6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
7. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9. Montrer que $v_n - e \sim -\dfrac{11e}{48n^2}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?

Problème 1 : *Une fonction définie par une intégrale (Adapté petites Mines 2008)*

Partie I : Développements limités et régularité

On considère la fonction
$$F : x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

1. Justifier que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que F' est du même signe que $h : x \mapsto x\cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer un développement limité de la fonction F en 0 à l'ordre 2 (on pourra d'aider de la question de cours 2).
4. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 (on précisera par quelle valeur). Dans la suite, on notera à nouveau F son prolongement.
5. Montrer que F est dérivable en 0 et donner une équation de sa tangente en 0.
6. Étudier la position de la courbe représentative de F par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.
7. Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = 0$.
8. Montrer, sans calcul, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $F'(a_k) = 0$.
9. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, h est strictement monotone sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ (on précisera la monotonie selon la parité de k et on pourra dériver h).
10. Les réels a_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont-ils uniques ?
11. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi qu'un équivalent de cette suite (on pourra écrire un encadrement).

Partie II : Une fonction définie par une intégrale.

On introduit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$,
$$\left|\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

12. Montrer que E est un espace vectoriel.

On considère dans la suite $f \in E$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

13. Justifier que I_f est bien définie et que f' est bornée sur $[0,1]$.
14. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$I_f(x) = \frac{\sin(x)f(1)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \sin(xt)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ (dépendant de f) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$|I_f(x)| \leq \frac{C}{x}$$

puis déterminer la limite de I_f en $+\infty$.

Partie III : Continuité de I_f.

16. Soit $a,b \in \mathbb{R}$. En utilisant l'égalité des accroissements finis appliquée à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$\cos(b) - \cos(a) = -\sin(c)(b-a).$$

17. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$ et $x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(xt) - \cos(x_0 t)| \leq |t|\,|x - x_0|.$$

18. Montrer ainsi que pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}$,

$$|I_f(x) - I_f(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^1 |t f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

19. Conclure que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
20. Retrouver ainsi la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 : *Polynômes de Tchebytchev et applications (Adapté Centrale 2002 et École de l'air 1993)*

La partie II est indépendante des autres parties.

Partie I : Polynômes de Tchebytchev.

On définit une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Expliciter T_2, T_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et que le coefficient dominant de T_n et 2^{n-1} (on pourra effectuer une récurrence forte).
3. Montrer que, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.
6. Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$

$$T_n'\big(\cos(\theta)\big) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n'(1) = n^2$ (on pourra faire tendre θ vers 0 dans l'égalité précédente).

Partie II : Une série numérique.

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$
9. Montrer qu'il existe des réels a, b tels que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{(k-1)}$ pour en déduire une expression simple, pour tout entier $n \geq 2$, de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
10. Déduire de deux questions précédentes que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
11. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note sa limite ℓ.
12. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = I_n + \frac{1}{4}S_n$.
13. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{3}{4}\ell$.

L'objet de la partie suivante est de calculer la limite ℓ.

Partie III : Calcul de la limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

14. Montrer que $T_n(X) = 2^{n-1}(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n)$ (on pourra calculer, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $T_n(x_k)$).
15. Soit I un intervalle ne contenant aucun x_k, $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que pour tout $x \in I$,
$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}.$$
Indication : dériver, en justifiant, $\ln(|T_n|)$.
16. En déduire que
$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}.$$
17. En exprimant $\frac{1}{\tan}$ uniquement en fonction de $\sin^2$, monter que
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = n^2 - \frac{n}{2}.$$
18. Justifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$2n^2 - n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2} \leq 2n^2.$$
19. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi^2}{8}$ puis déterminer ℓ.

Partie IV : Points de Tchebytchev.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

20. Justifier, pour tout polynôme P, l'existence du réel $M_P = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.
21. Calculer M_{T_n}.

On considère dans toute la suite un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ **dont le coefficient dominant vaut** 1**.** On suppose que
$$M_P < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

22. Simplifier, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T_n(\alpha_k)$ et déterminer le signe de $P(\alpha_k) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(\alpha_k)$.
23. Montrer que $P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ a au moins n racines.
24. Conclure à une contradiction (on rappelle que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}).
25. Quelle est la borne inférieure des valeurs M_P lorsque P décrit l'ensemble des polynômes unitaires de degré n ? Est-ce un minimum ?

Cette dernière partie signifie que pour « bien » approximer une fonction sur $[-1,1]$ *par un polynôme d'interpolation, il vaut mieux interpoler la fonction en les points* x_k*.*