Questions de cours

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le noyau d'une application linéaire pour qu'elle soit injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Que peut-on dire d'un endomorphisme p d'un espace vectoriels E vérifiant $p^2 = p$?

Exercice 1 *: Polynômes de Lagrange*

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels distincts. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$L_0(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad L_1(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{et} \quad L_2(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

On notera également $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $L_i(a)$, $L_i(b)$ et $L_i(c)$ pour $i = 0, 1, 2$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ est une famille libre.
3. En déduire que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \big(P(a), P(b), P(c)\big) \end{array}.$$

4. Montrer que φ est injective.
5. En déduire que φ est un isomorphisme. On notera φ^{-1} son application réciproque.
6. Que valent $\varphi(L_0)$, $\varphi(L_1)$ et $\varphi(L_2)$? En déduire une nouvelle démonstration de la question précédente ainsi que les valeurs de $\varphi^{-1}\big((1,0,0)\big)$, $\varphi^{-1}\big((0,1,0)\big)$ et $\varphi^{-1}\big((0,0,1)\big)$.
7. Avec la question précédente, montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\varphi^{-1}\big((x,y,z)\big) = xL_0(X) + yL_1(X) + zL_2(X).$$
8. Déterminer les expressions des matrices $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)$ de φ de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$ ainsi que la matrice $A' = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(\varphi)$ de φ de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{C}$.
9. Justifier que A et A' sont inversibles, déterminer l'inverse de A' et montrer que
$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \begin{pmatrix} b^2c - c^2b & c^2a - a^2c & a^2b - b^2a \\ c^2 - b^2 & a^2 - c^2 & b^2 - a^2 \\ b - c & c - a & a - b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *: Projecteurs et symétries*

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et les applications

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-2y-2z}{3}, \dfrac{-2x+y-2z}{3}, \dfrac{-2x-2y+z}{3}\right) \end{array}$$

et

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{2x-y-z}{3}, \dfrac{-x+2y-z}{3}, \dfrac{-x-y+2z}{3}\right) \end{array}.$$

On note $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (0,1,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que s et p sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(s)$.
4. Montrer que $s^2 = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3}$ et calculer également p^2. Justifier que $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big((x,y,z)\big) = -\frac{2}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$.
6. En déduire que (e_2, e_3) est une base de $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
7. Montrer également que (e_1) est une base $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
8. Déterminer une base de $\ker(p)$ ainsi qu'une base de (p).
9. Quelles relations y a-t-il entre $\ker(p)$, (p), $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Dans les deux dernières questions, s et p sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ **quelconques** vérifiant

$$s = 2p - \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3}.$$

10. Montrer que s est une symétrie si et seulement si p est un projecteur.
11. Montrer que si s est une symétrie alors

$$\ker(p) = \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad (p) = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Problème 1 : Hyperplans et sous-espaces vectoriels (adaptation de CCP PC)

Un exemple.

Dans toute cette partie on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On pose

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y = 0, x+z = 0\}$$

ainsi que

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+z = 0\}.$$

1. Monter que D, H_1, H_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de D et la dimension de D.
3. Déterminer des bases de H_1 et H_2.
4. Déterminer les dimensions de H_1 et H_2 et montrer que D est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Droites de $\mathbb{R}^3$.

Dans toute cette partie on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On pose $D = \mathrm{Vect}\big((a,b,1)\big)$ où $(a,b,1) \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Les réels a et b sont **fixés**.

5. Donner une base de D et la dimension de D.
6. Montrer que les familles $\big((a,b,1),(1,0,0)\big)$ et $\big((a,b,1),(0,1,0)\big)$ sont libres.

7. On pose $H_1 = \text{Vect}\big((a,b,1),(1,0,0)\big)$ et $H_2 = \text{Vect}\big((a,b,1),(0,1,0)\big)$. Montrer que H_1 et H_2 sont de dimension 2 et que $D = H_1 \cap H_2$.

Désormais, on pose $D = \text{Vect}\big((a,b,0)\big)$ où $(a,b,0) \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ **non nul**.

8. Déterminer à nouveau la dimension de D
9. On pose $H_1 = \text{Vect}\big((a,b,0),(0,0,1)\big)$ et $H_2 = \text{Vect}\big((0,1,0),(1,0,0)\big)$. Montrer que $D = H_1 \cap H_2$ et que H_1 et H_2 sont de dimension 2.
10. Conclure de façon générale que toute droite de $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$.

Intersection de deux hyperplans :
On considère dans cette partie un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle hyperplan H de E un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. On considère ici deux hyperplans de E notés H_1 et H_2.

11. Justifier que $\dim(H_1 \cap H_2) \leq n-1$.
12. En déduire, en appliquant la formule de Grassmann, que
$$\dim(H_1 + H_2) \geq n-1.$$
13. À quoi est égal $H_1 + H_2$ lorsque $\dim(H_1 + H_2) = n$?
14. Montrer que si $\dim(H_1 + H_2) = n-1$ alors $H_1 = H_2$ (utiliser à nouveau la formule de Grassmann).

Intersection de plusieurs hyperplans :
On considère dans cette partie un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et F un sous espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$.

15. Justifier que $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$.
16. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F.

On pose pour $i \in [\![p+1, n]\!]$,
$$H_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

17. Montrer que pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, H_i est un hyperplan de E
18. Justifier que $F = H_{p+1} \cap \cdots \cap H_n$.
19. Conclusion : montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, tout sous-espace vectoriel de dimension $p < n$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans.

Problème 2 : Endomorphismes nilpotents (adaptation de Centrale PSI)

Dans tout ce problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Ce problème étudie de façon théorique les endomorphismes f d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant : il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On prendra garde au fait que k n'est pas nécessairement la dimension de E.

Un premier exemple en dimension 3.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x,y) \end{array}.$$

1. Justifier que $h^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que h^2 n'est pas l'application nulle. Que vaut h^k, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$?
2. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\big(e_1, h(e_1), h^2(e_1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

L'opérateur de décalage général.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application

$$S: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (0,x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{array}.$$

et note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $S^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ et que $S^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$,

$$S^k(e_1) = \underbrace{S\circ\cdots\circ S}_{k \text{ fois}}(e_1) = e_{k+1}.$$

5. Conclure que $\mathscr{B} = \big(e_1, S(e_1),\dots,S^{n-1}(e_1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
6. Déterminer la matrice de S dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(S)$.

Indice de nilpotence.
On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

et on veut montrer que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$N_p = \ker(f^p).$$

7. Que vaut N_k ?
8. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.
9. En déduire la monotonie de la suite $\big(\dim(N_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et que cette suite converge.
10. Montrer que s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

On admet qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

11. Justifier qu'il existe un plus petit entier p_0 tel que $N_{p_0} = E$.
12. Conclure que $p_0 \leq n$ et que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Endomorphismes nilpotents d'indice $\dim(E)$ **:**

On considère le cas où $n = \dim(E)$ et où l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie :

$$f^n = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

13. Justifier qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.

On considère la famille

$$\mathscr{B} = \big(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\big).$$

14. Montrer que $\mathscr{B}$ est libre (on pourra composer une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ par f^{n-1}).
15. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E.
16. On note, pour $i = 1, \ldots, n$, $b_i = f^{i-1}(a)$. Justifier, pour $i = 1, \ldots, n-1$, que $f(b_i) = b_{i+1}$ et déterminer la valeur de $f(b_n)$.
17. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

On note à nouveau $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère l'unique application linéaire ψ de E dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\psi(b_i) = e_i.$$

18. Pourquoi ψ est-elle un isomorphisme ?
19. On reprend l'endomorphisme S de la partie sur l'opérateur de décalage. Montrer que

$$f = \psi^{-1} \circ S \circ \psi \quad \text{et} \quad \psi \circ f \circ \psi^{-1} = S.$$

Ainsi tous les endomorphismes cherchés sont de la forme $\psi^{-1} \circ S \circ \psi$.

Commutant d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant, comme dans la partie précédente, $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On dit qu'un endomorphisme u de E commute avec f si

$$f \circ u = u \circ f.$$

On veut trouver une caractérisation de l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. On appelle cet ensemble le commutant de f et on le note $\mathscr{C}(f)$.

20. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
21. Soit $u \in \mathscr{C}(f)$. On utilise les notations de la partie précédente. Justifier qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(a) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

22. Déterminer pour $k = 0, \ldots, n-1$ les coordonnées de $u\big(f^k(a)\big)$ dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.
23. En déduire que $u = \lambda_1 Id_E + \lambda_2 f + \cdots + \lambda_n f^{n-1}$.
24. Montrer que $\mathscr{C}(f) = \text{Vect}(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
25. Quelle est la dimension de $\mathscr{C}(f)$?
26. Quelles sont les formes des différentes applications linéaires commutant avec la dérivation des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$?