

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et rédigez toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Une suite d'intégrales

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(t) dt.$$

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer I_0 .
2. Justifier l'inégalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$0 \leq \varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t)$$

puis déterminer le signe et la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. En déterminant le maximum de la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0, 1]$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
7. En exprimant, pour $n \in \mathbb{N}$, nI_n en fonction de I_{n+1} et I_n , montrer que la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
8. Déterminer également la limite de la suite $(n^2 I_n - n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
9. Conclure en explicitant trois réels a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

10. Déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 2 : Transformation d'Abel

Partie I : Transformation dans le cas général

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive décroissante de limite nulle et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

- I.1 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})$ et montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_0.$$

- I.2 Justifier qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|(a_n - a_{n+1})S_n| \leq M(a_n - a_{n+1})$$

puis en déduire que $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est une série convergente.

- I.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 S_0 + \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) - a_{n+1} S_n = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) S_k.$$

- I.4 En montrant que $(a_{n+1} S_n)$ tend vers 0, conclure que $\sum a_n (S_n - S_{n-1})$ est une série convergente.

Partie II : Application à une série particulière.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $a_0 = 1$, $S_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}.$$

II.1 Justifier que (a_n) respecte les hypothèses de la partie I et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $S_n - S_{n-1}$.

II.2 En exprimant (S_n) avec la somme géométrique, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|S_n| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}.$$

II.3 Conclure, avec la partie I, que

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n} \text{ est convergente.}$$

Problème : Calcul de l'intégrale de Gauss par les intégrales de Wallis (adapté de CCP PSI) _____

Le but du problème est de calculer l'intégrale, à laquelle on donnera un sens :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Partie I : Une étude de fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2) dt = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

I.1 Calculer $f(0)$, justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x^2}$.

I.2 En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

I.3 En justifiant que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-x}.$$

I.4 Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1}.$$

I.5 En déduire que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et que f admet une limite finie en $+\infty$ (on utilisera 2).

Ceci permet de justifier la notation $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ que l'on calcule dans la suite du problème.

Partie II : Intégrales de Wallis

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$.

II.1 Calculer W_0 et W_1 et W_2 (on pourra utiliser les formules d'Euler).

II.2 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)^n.$$

II.3 En déduire, en intégrant l'inégalité précédente, que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

II.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ (on prendra garde que l'inégalité est stricte).

II.5 Montrer ainsi, avec les deux questions précédentes, que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

II.6 Montrer également que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ et que $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

On va maintenant déterminer un équivalent de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant que $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)^{n+1} dt$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que

$$W_{n+2} = [\sin(t) \cos(t)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 \cos(t)^n dt.$$

Simplifier cette expression en déterminant la valeur du crochet.

II.8 Rappeler la valeur, pour tout réel t de $\sin(t)^2 + \cos(t)^2$ et en déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+1}).$$

II.9 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

II.10 Avec les questions II.6 et II.8 montrer que $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$ puis, avec II.8, que

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Quelle est la limite de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie III : Calcul de l'intégrale de Gauss

III.1 Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$: $e^{-x} \geq 1 - x$.

III.2 En déduire, (en posant $x = t^2$ dans la question précédente), que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$e^{-nt^2} \geq (1 - t^2)^n$$

puis que

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt.$$

III.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{n}t$, montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy = \int_0^1 e^{-nt^2} dt$.

III.4 En effectuant le changement de variable $t = \sin(y)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)^{2n+1} dy.$$

III.5 Déduire des trois questions précédentes et de la partie précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt.$$

III.6 Avec l'équivalent de la partie précédente, quelle est la limite de $(\sqrt{n}W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$?

III.7 En passant à la limite dans l'inégalité de III.5, montrer que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

III.8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sqrt{n}W_{2n-2} \geq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ puis conclure.

Problème 3 : Développement asymptotique de la série harmonique

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Le but du problème est d'étudier la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie I : Constante d'Euler

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

I.1 Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1+x) \leq x.$$

I.2 Donner un développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0.

I.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) .

I.4 Déterminer également la monotonie de (u_n) et montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

I.5 On note γ la limite commune de (u_n) et (v_n) . Montrer que $\gamma > 0$ et que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Donner également un équivalent de la suite (H_n) .

Partie II : Série alternée

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

II.1 Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n en fonction de H_n et H_{2n} .

II.2 En utilisant la dernière question de la partie I (en l'appliquant à H_{2n} notamment) et l'égalité précédente, montrer que

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

II.3 Justifier que (A_n) est convergente.

II.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = S_n$ (on pourra effectuer une récurrence).

II.5 Conclure que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Partie III : Équivalent du reste d'une série convergente

On considère deux suites (a_n) et (b_n) à termes strictement positifs tel que

$$a_n \sim b_n \quad \text{et} \quad \sum a_n \text{ converge.}$$

III.1 Quelle est la nature de $\sum b_n$? Justifier les existences, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

III.2 Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$:

$$(1 - \varepsilon)b_k \leq a_k \leq (1 + \varepsilon)b_k.$$

III.3 En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

III.4 Conclure que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

Partie IV : Application à la série harmonique

On reprend les notations de la partie I et on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = u_n - \gamma = H_n - \ln n - \gamma.$$

IV.1 En utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ avec $x = 1/n$, montrer que

$$w_n - w_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

IV.2 En déduire que

$$w_n = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Pour l'équivalent, on utilisera le résultat de la partie précédente.

IV.3 Montrer l'encadrement, par comparaison série-intégrale, pour tous entiers N, n vérifiant $N \geq n+1 \geq 2$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2}.$$

IV.4 En déduire, en calculant les intégrales et en faisant tendre N vers $+\infty$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

IV.5 En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis de (w_n) .

IV.6 Conclure que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$