Chapitre B2 : Suites numériques

Dans ce chapitre, On donne la première définition précise de limite pour des suites numériques et on démontre plusieurs résultats admis l'année passée.

1 Compléments sur les nombres réels

1 a) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On effectue deux rappels.

Proposition 1.1

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0\,; \end{cases}$

(ii) $\sqrt{x^2} = |x|$;

(iii) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(iv) $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Théorème 1.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, appelé ***partie entière de*** *x, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Proposition 1.3

Si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r \in]x, y[$.

Remarque 1.4

On dit parfois que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Aussi proche que l'on souhaite d'un réel quelconque, il existe toujours un nombre rationnel.

1 b) Borne supérieure, borne inférieure.

Définition 1.5

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

(i) $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $x \leq M$;

(ii) $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $a \geqslant m$.

Si $M \in A$ (resp. $m \in A$), c'est le **plus grand** (resp. plus petit) **élément** de A noté $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Définition 1.6

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est dite ***majorée*** *(respectivement minorée) si elle possède un majorant (respectivement un minorant). Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est dite* ***bornée*** *si elle à la fois majorée et minorée.*

Exemple 1.7

Donner une partie de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de plus grand élément mais qui est majorée.

Définition 1.8

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On appelle, celle-ci existe :

(i) ***borne supérieure*** *de A le* ***plus petit*** *des majorants de A et on la note* $\sup(A)$ *;*

(ii) ***borne inférieure*** *de A le* ***plus grand*** *des minorants de A et on la note* $\inf(A)$.

Exemple 1.9

1. Déterminer une partie de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de borne supérieure.
2. Déterminer les bornes supérieures et inférieures et les plus petits et plus grands éléments des parties $A = \{1, 2, 8, 5\}$, $B = \left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $C =]0, 1]$.

Axiome 1.10

(i) Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure.

(ii) Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée admet une borne inférieure.

Remarque 1.11

On appelle axiome une proposition non démontrable utilisée comme fondement d'une théorie mathématique. N'ayant pas fait de construction des nombres réels, on devra donc supposer ceci comme vrai sans pouvoir le démontrer.

1 c) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.12

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie non vide I de $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

- *si I est* ***bornée****, il existe $a \neq b \in \mathbb{R}$ tels que*
  - *(i)* $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *;*
  - *(ii) ou bien* $I =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *;*
  - *(iii) ou bien* $I = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *;*
  - *(iv) ou bien* $I =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *;*
- *si I est* ***majorée mais non minorée****, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*
  - *(i)* $I = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ *;*
  - *(ii) ou bien* $I =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ *;*
- *si I est* ***minorée mais non majorée****, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que*
  - *(i)* $I =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid b \geqslant x\}$ *;*
  - *(ii) ou bien* $I =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid b > x\}$ *;*
- *si I n'est* ***ni minorée ni majorée****, $I = \mathbb{R}$.*

Théorème 1.13

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. I est un intervalle si et seulement si pour tous $x, y \in I$, $[x, y] \subset I$.

2 Généralités sur les suites

2 a) Modes de définition d'une suite

Définition 2.1

On appelle ***suite à valeurs réelles*** *toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Elle sera notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u(n) = u_n$$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles.

Généralement, ces suites seront définies de la façon suivante :

— par une **formule explicite** : directement en fonction de n ;

— par une **formule de récurrence** : une relation entre les termes consécutifs de la suite ;

— par une **formule implicite** : le terme général est solution d'une équation dépendant de n.

Exemple 2.2
Donner un exemple de chaque mode de définition.

Remarque 2.3

— Même si dans le cas général, une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ celle-ci peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang et être, par exemple, une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— Dans les second et troisième cas de définition d'une suite, il n'est pas toujours possible d'exprimer (u_n) directement en fonction de n.

2 b) Suites majorées, minorées, bornées

On effectue quelques rappels :

Définition 2.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

(i) la suite est ***majorée*** *si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq M$;*

(ii) la suite est ***minorée*** *si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant m$;*

(iii) la suite est ***bornée*** *si u est majorée et minorée.*

Remarque 2.5
La suite est, respectivement, minorée, majorée, bornée si et seulement si la partie $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'est.

Proposition 2.6

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n| \leq C.$$

2 c) Monotonie

Définition 2.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

*(i) la suite est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$,*

*(ii) la suite est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$,*

*(iii) la suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

*On parle de **stricte monotonie** quand les inégalités précédentes sont strictes.*

Exemple 2.8

Déterminer les monotonies éventuelles et le caractère minoré ou majoré éventuel des suites

$$(n \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

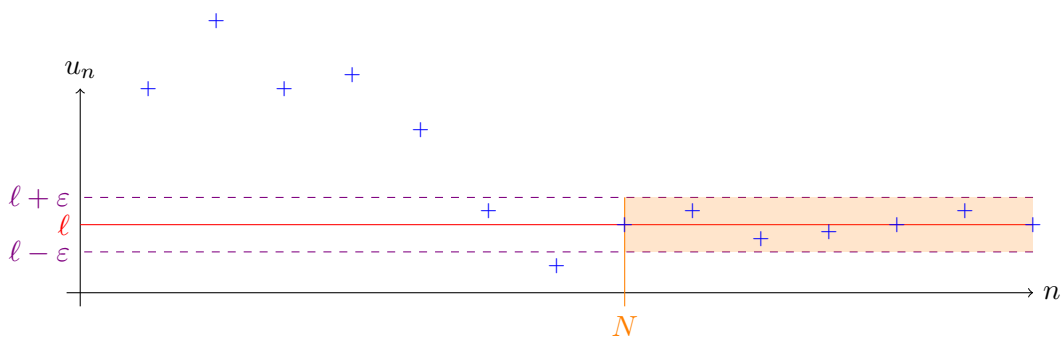
3 Suites convergentes

3 a) Limite d'une suite et propriétés

Définition 3.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers la limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, on note :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$



Exemple 3.2

Déterminons, avec la définition, la limite de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 3.3

La limite d'une suite convergente est unique.

Proposition 3.4

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 3.5
La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)$ est bornée mais non convergente (on montre qu'elle n'est pas convergente dans la suite du cours).

3 b) Opérations sur les limites de suites convergentes

Théorème 3.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes de limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\ell + \ell'$,

(ii) $(\lambda \times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\lambda \times \ell$,

(iii) $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\ell \times \ell'$,

(iv) si $\ell \neq 0$, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie à partir d'un certain rang, et elle est convergente de limite* $\dfrac{1}{\ell}$.

Remarque 3.7
Pour la limite d'un quotient, on pourra écrire $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} \times u_n$.

3 c) Suites extraites

Définition 3.8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite extraite*** *ou* ***sous-suite*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Une telle suite est simplement constituée d'éléments u_n pris dans l'ordre croissant, comme par exemple :

— $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$ avec $\varphi : n \mapsto 2n$, la suite des termes d'indice pair ;

— $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n+1}$ avec $\varphi : n \mapsto 2n+1$, la suite des termes d'indice impair.

Proposition 3.9

Si une suite est convergente de limite ℓ, alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.

Exemple 3.10
Montrons que les suites $((-1)^n)$ et $(\cos n)$ sont divergentes.

Remarque 3.11
Comme dans l'exemple précédent, la propriété précédente est très utile pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente en trouvant deux sous-suites qui admettent des limites différentes.

3 d) Limites et inégalités

Proposition 3.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant v_n,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple 3.13
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n < v_n.$$

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Théorème 3.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente de limite ℓ.

Exemple 3.15
La suite $\left(\frac{\ln n}{e^n}\sin n\right)$ est-t-elle convergente ?

Proposition 3.16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} u_n < \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n < v_n$.

Exemple 3.17

Montrer que la suite $\left(\frac{n+1}{n} + e^{-n}\sin n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant à partir d'un certain rang.

4 Suites divergentes

Définition 4.1

On appelle suite divergente une suite ne convergeant pas.

4 a) Limites infinies

Définition 4.2

Soit u une suite à valeurs réelles.

*(i) On dit que u **diverge vers** $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$:*

$$u_n \geqslant M$$

et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

*(ii) On dit que u **diverge vers** $-\infty$ si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$:*

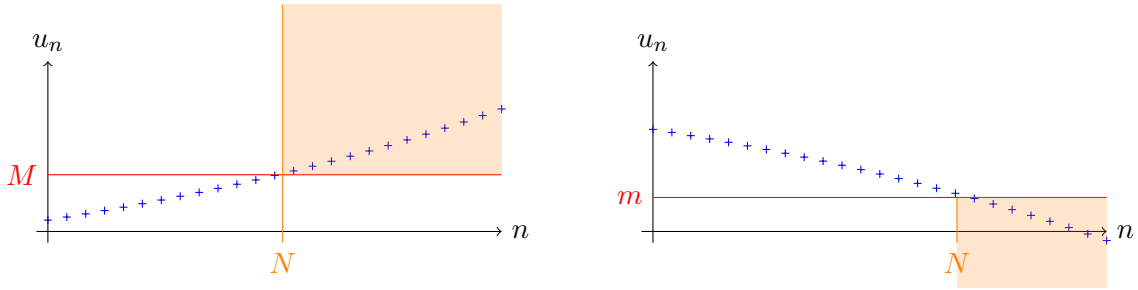
$$u_n \leqslant m$$

et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque 4.3
Ainsi, une suite divergente peut :

- ne pas admettre de limite (finie ou infinie) ;
- diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La limite $+\infty$ ou $-\infty$ est également unique.



Exemple 4.4

Montrer, en utilisant la définition, que la suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

4 b) Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites finies se prolongent aux limites infinies en suivant le tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\, v_n$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Les notations F.I. symbolisent les formes indéterminées.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$

La notation 0^+ (respectivement 0^-) signifie que u_n est strictement positif (respectivement strictement négatif) à partir d'un certain rang.

4 c) Limites infinies et inégalités

Proposition 4.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\lim u_n = +\infty$, *alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente et* $\lim v_n = +\infty$.

(ii) Si $\lim v_n = -\infty$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente et* $\lim u_n = -\infty$.

Exemple 4.6

Déterminer la limite éventuelle de $(e^n + 1/n + \sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5 Théorèmes d'existence de limites

5 a) Théorème de la limite monotone

Théorème 5.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite* ***croissante****.*

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, alors elle est convergente et dans ce cas,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors elle est divergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 5.2
Ainsi, une suite croissante ne peut pas ne pas avoir de limite : si elle est majorée, elle converge et si elle n'est pas majorée, si limite est $+\infty$.

Exemple 5.3
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est convergente vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

Théorème 5.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***décroissante****.*

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée, alors elle est convergente et dans ce cas,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas minorée, alors elle est divergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

5 b) Suites adjacentes

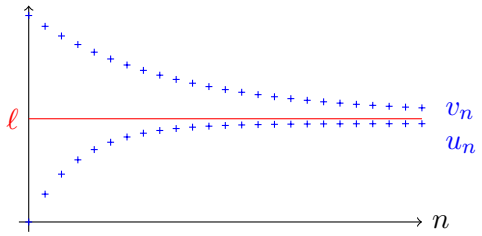
Définition 5.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que ces suites sont adjacentes si :

$$\begin{cases} \textit{l'une est croissante,} \\ \textit{l'autre est décroissante,} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0. \end{cases}$$

Théorème 5.6

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux **suites adjacentes** avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite ℓ en vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*



Exemple 5.7
Soit x un réel. Déterminer deux suites de rationnels, adjacentes, qui convergent vers x.

6 Suites à valeurs complexes

Tout le chapitre est valable pour des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec les deux remarques suivantes :

(i) toutes les valeurs absolues sont remplacées par des modules (même notation) ;

(ii) il n'y a pas d'inégalités possibles avec les complexes. En particulier, pas de suite croissante ou décroissante.

Si on considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes (on note $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = Re(z_n) + i\, Im(z_n).$$

Proposition 6.1

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Cette suite est convergente si et seulement si les suites réelles $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$ sont convergentes et dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} Re(z_n) + i \lim_{n\to+\infty} Im(z_n).$$

Exemple 6.2
Déterminer une expression simple et la limite éventuelle de la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{i}{2}u_n + 4.$$